

Institución Universitaria Pascual Bravo  
Facultad de Ingeniería



**Modelos Espacio-Temporales para la  
Predicción del Crimen en Microterritorios:  
Caso de Estudio Medellín, Colombia**

Tesis presentada como requisito para optar el título de:  
**Magíster en Ciencias Computacionales**

**Daniel Londoño Cano**

Medellín, 2025

Institución Universitaria Pascual Bravo  
Facultad de Ingeniería



Máster en Análisis espacio temporal, INLA

# Modelos Espacio-Temporales para la Predicción del Crimen en Microterritorios: Caso de Estudio Medellín, Colombia

Tesis presentada como requisito para optar el título de:  
**Magíster en Ciencias Computacionales**

**Daniel Londoño Cano**

Bajo la supervisión de:  
Directora: Alejandra Estefanía Patiño Hoyos  
Codirector: Mateo Rico García

Medellín, 2025

*A mí mismo, por atreverme a emprender un estudio que en principio jamás imaginé fuera distinto a los proyectos de consultoría y generación de recursos. Este trabajo representa también una búsqueda personal por entender que el conocimiento tiene un valor propio, más allá de su aplicación inmediata.*

*A mi esposa Sara, cuyo amor y apoyo han sido el bastón fundamental de este camino. En las noches largas, mientras todo parecía detenerse, fue ella quien se aseguró de que todo siguiera funcionando, recordándome con paciencia y ternura la razón por la que vale la pena perseverar.*

*A la mejor asesora que podría haber tenido, que asumió el doble reto de ser rigurosa y disciplinada sin dejar de ser mi amiga desde hace más de una década. Su guía constante, su exigencia y su confianza hicieron posible que esta investigación llegara a puerto.*

*A mis padres, por ser siempre el soporte incondicional en cada decisión, por enseñarme el valor del esfuerzo y por acompañarme en cada etapa, incluso en aquellas que no comprendían del todo pero apoyaban sin reservas.*

*A mis grandes amigos Sebas, Dieguito, Valen y Christian, compañeros de vida y de ideas. A Sebas, especialmente, porque fue quien me metió en este mundo y me empujó a ir más allá de lo que creía posible.*

*A Oswaldo Zapata, quien me abrió las puertas al universo de la seguridad urbana y nos dejó el “método Oswaldo”: una mezcla única de disciplina y perfección en el detalle que siempre procuraré honrar.*

*A la institución que me acogió y me dio las herramientas para crecer, así como por la beca recibida en los primeros semestres, que hizo posible dedicar tiempo y energía a construir conocimiento con propósito.*

*Y a todas las personas que, de una u otra forma, estuvieron presentes durante este camino —con una palabra, una conversación o un gesto de apoyo— y que hicieron de este proceso no solo un ejercicio académico, sino una experiencia profundamente humana.*

# Abstract

This thesis develops an advanced statistical framework to model and forecast the spatio-temporal dynamics of homicide in Medellín by integrating hierarchical Bayesian inference, a spatial regionalization based on hexagonal grids, and efficient estimation through *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA). Unlike approaches built upon administrative boundaries, the hexagonal discretization mitigates the effects of the *modifiable areal unit problem* (MAUP) and enables a continuous and homogeneous representation of the underlying risk surface.

Count models with BYM, BYM2 and ICAR spatial structures and the four standard space-time interactions (Types I–IV) were estimated across elemental cells and contiguous regionalizations at 22 spatial resolutions. A total of 528 configurations were evaluated using model-based criteria (DIC, WAIC), geographically informed cross-validation (LGOCV), and out-of-sample predictive metrics (MAE, RMSE, IS). Spatial scale emerged as the principal determinant of performance: intermediate regionalizations between 1,900 and 2,500 meters provided the best balance between granularity, stability and interpretability. Among the structures assessed, the ICAR model with Type IV interaction exhibited the most consistent behaviour in both fitting and forecasting.

The models reproduce persistent high-risk corridors in the central-north and northeastern sectors of the city, demonstrating that urban homicide exhibits strong spatio-temporal inertia and short-range propagation well captured by structures combining spatial dependence and temporal memory. Forecasts remain well-calibrated at one- and two-year horizons and preserve the relative risk hierarchy without generating scale-induced artefacts.

# Resumen

Esta tesis desarrolla un marco estadístico avanzado para modelar y predecir la dinámica espacio-temporal del homicidio en Medellín, combinando inferencia bayesiana jerárquica, regionalización mediante grillas hexagonales y estimación eficiente con *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA). A diferencia de los enfoques basados en límites administrativos, la discretización hexagonal reduce los efectos del *modifiable areal unit problem* (MAUP) y permite representar de manera continua la estructura territorial del riesgo.

Se estimaron modelos de conteo con estructuras espaciales BYM, BYM2 e ICAR y las cuatro interacciones espacio-temporales (Tipos I-IV), evaluados en celdas elementales y regionalizaciones contiguas a 22 resoluciones de apotema. En total se compararon 528 configuraciones con criterios de ajuste (DIC, WAIC), validación geográfica (LGOCV) y desempeño predictivo (MAE, RMSE, IS). La escala espacial emergió como el determinante principal del rendimiento: las regionalizaciones intermedias entre 1 900 y 2 500 metros ofrecieron el mejor equilibrio entre granularidad, estabilidad e interpretabilidad. Entre las estructuras evaluadas, el modelo ICAR con interacción Tipo IV mostró la mayor consistencia en escenarios de ajuste y predicción.

El modelo reproduce la persistencia de corredores históricos de alta incidencia en la zona centro-norte y nororiental, evidenciando que el homicidio urbano presenta una fuerte inercia espacio-temporal y una propagación local bien capturada por estructuras que integran dependencia espacial y memoria temporal. Las predicciones mantienen una calibración elevada a uno y dos años y conservan la jerarquía relativa del riesgo sin generar artefactos derivados de la escala.



# Índice general

Abstract . . . . .	iv
Resumen . . . . .	v
Índice de figuras . . . . .	ix
Índice de tablas . . . . .	xi
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Planteamiento del problema</b>	<b>5</b>
<b>3 Objetivos</b>	<b>9</b>
3.0.1 Objetivo General . . . . .	9
3.0.2 Objetivos Específicos . . . . .	9
<b>4 Marco de referencia</b>	<b>11</b>
4.1 Estado del arte . . . . .	11
4.2 Marco teórico . . . . .	14
4.2.1 Fundamentos teóricos del crimen y su expresión espacial . . . . .	14
4.2.2 El espacio geográfico y el problema del MAUP . . . . .	15
4.2.3 Regionalización espacial y control del MAUP . . . . .	16
Definición y objetivo de homogeneidad . . . . .	17
Métrica de similitud multivariante y componente geográfico . . . . .	18
Árbol generador mínimo y garantía de contigüidad . . . . .	18
Selección del número de regiones y restricciones de estabilidad . . . . .	19
4.2.4 Conceptos básicos de estadística Bayesiana . . . . .	19
Probabilidad condicional . . . . .	19
Función de verosimilitud . . . . .	20
Teorema de Bayes . . . . .	20
Distribución <i>a priori</i> . . . . .	20
Distribución <i>a posteriori</i> . . . . .	21
Intervalos de credibilidad . . . . .	21
4.2.5 Modelos jerárquicos Bayesianos . . . . .	21
Estructura general . . . . .	21
Distribución conjunta y posteriori . . . . .	22
Ventajas del enfoque jerárquico . . . . .	22
Relevancia para aplicaciones espacio-temporales . . . . .	23

4.2.6	Medidas clásicas de estimación de riesgo . . . . .	23
4.3	Modelos espacio temporales . . . . .	24
4.3.1	Formulación de datos y verosimilitud . . . . .	25
4.3.2	Estructuras espaciales para datos de área . . . . .	27
4.3.3	Estructuras temporales . . . . .	28
4.3.4	Interacciones espacio–temporales (tipología de Knorr–Held) e identi- ficabilidad . . . . .	29
4.3.5	Integrated Nested Laplace Approximation (INLA) en modelos jerárqui- cos espacio–temporales bayesianos . . . . .	30
	Aproximación de Laplace . . . . .	30
	Modelos Gaussianos Latentes . . . . .	31
	Inferencia con INLA . . . . .	32
	INLA: ventajas computacionales y relevancia en aplicaciones . . . . .	32
	SPDE: representación continua de la dependencia espacial . . . . .	32
4.3.6	Predicción espacio–temporal con INLA . . . . .	33
4.3.7	Criterios de evaluación y selección de modelos . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Metodología</b>	<b>37</b>
5.1	Entendimiento del negocio . . . . .	38
5.2	Comprensión de los datos . . . . .	39
5.3	Preparación de los datos . . . . .	40
5.3.1	Estandarización, validación y enriquecimiento . . . . .	40
5.3.2	Unidades espaciales y control del MAUP . . . . .	41
5.3.3	Redistribución censal y proyección poblacional . . . . .	41
5.4	Modelado . . . . .	42
5.4.1	Estructura general del modelo . . . . .	42
5.4.2	Dependencias espaciales y temporales . . . . .	43
5.4.3	Estructura jerárquica y priors . . . . .	43
5.5	Evaluación . . . . .	44
5.5.1	Criterios de ajuste bayesiano . . . . .	44
5.5.2	Evaluación predictiva fuera de muestra . . . . .	44
5.5.3	Integración multicriterio . . . . .	45
5.6	Despliegue . . . . .	45
5.6.1	Proyecciones prospectivas . . . . .	45
5.6.2	Productos analíticos y cartográficos . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Resultados</b>	<b>47</b>
6.1	Análisis descriptivo . . . . .	47
6.1.1	Patrón espacial . . . . .	48
6.1.2	Patrón temporal . . . . .	51
6.1.3	Patrón espacio–temporal . . . . .	53
6.2	Estructura espacio–temporal y diseño del modelo bayesiano . . . . .	57
6.2.1	Estructura general del modelo . . . . .	57
6.2.2	Dependencia espacial . . . . .	58
6.2.3	Dependencia temporal e interacción espacio–tiempo . . . . .	58

6.2.4	Hiperparámetros y especificación de priors . . . . .	59
6.2.5	Diseño comparativo y evaluación . . . . .	60
6.3	Criterios comparativos de ajuste y capacidad predictiva . . . . .	61
6.3.1	Diseño experimental y combinatoria de modelos . . . . .	61
6.3.2	Evaluación comparativa de ajuste y reducción del universo de modelos . . . . .	61
6.3.3	Esquema de validación temporal con ventanas deslizantes . . . . .	66
6.3.4	Evaluación predictiva por escenarios espaciales . . . . .	67
6.3.5	Índice predictivo compuesto y selección final de modelos . . . . .	72
6.3.6	Proyecciones espacio–temporales de los modelos seleccionados . . . . .	72
<b>7</b>	<b>Discusión</b>	<b>81</b>
<b>8</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>85</b>
<b>Anexos</b>		<b>93</b>
.1	Protocolo de evaluación y selección de modelos . . . . .	93
.1.1	Etapa I. Evaluación de ajuste penalizado . . . . .	93
.1.2	Etapa II. Filtrado jerárquico de configuraciones . . . . .	94
.1.3	Etapa III. Validación predictiva fuera de muestra . . . . .	94
.1.4	Etapa IV. Índice compuesto de desempeño . . . . .	95
.2	Distribución predictiva de los conteos . . . . .	95



# Índice de figuras

6.1	Tasa de homicidios por barrio en la zona urbana de Medellín (2003–2024). . .	49
6.2	Tasa de homicidios según grillas hexagonales elementales (2003–2024). . . . .	50
6.3	Tasa de homicidios según grillas hexagonales regionalizadas (2003–2024). . .	51
6.4	Evolución anual de la tasa de homicidios por tipo de área (2003–2024). Con- venciones: línea continua y puntos = tasa urbana total de Medellín; cajas = distribución anual de tasas por unidad espacial (grillas elementales y regionali- zadas). Eje Y truncado al percentil 95 % (= 267). . . . .	52
6.5	Evolución espacio–temporal de la tasa de homicidios por barrios en la zona urbana de Medellín (2003–2024). Escala logarítmica acotada a los percentiles 1–99 para reducir la influencia de valores extremos. . . . .	54
6.6	Evolución espacio–temporal de la tasa de homicidios según grillas hexagonales elementales (apotema = 2 500 m) en la zona urbana de Medellín (2003–2024). . . . .	55
6.7	Evolución espacio–temporal de la tasa de homicidios en grillas regionalizadas (base = 2 500 m) en la zona urbana de Medellín (2003–2024). . . . .	56
6.8	Rangos relativos de DIC, WAIC y LGOCV según tipo de área, escala espacial, estructura espacial e interacción espacio–tiempo. Los segmentos representan los rangos [mín–máx] por área y los puntos indican la mediana. . . . .	63
6.9	Esquema de validación con ventanas deslizantes. Cada ventana utiliza diez años para calibración (segmentos azules) y tres para pronóstico (segmentos naranjas). Se aplicaron cinco ventanas: 2008–2017→2018–2020, 2009–2018→2019–2021, 2010–2019→2020–2022, 2011–2020→2021–2023 y 2012–2021→2022–2024. . .	67
6.10	Desempeño predictivo por escenario espacial. Relación entre tamaño de malla y MAE en distintas estructuras espaciales y horizontes de predicción (1–3 años). . .	68



# Índice de tablas

- 4.1 Especificación de los tipos de interacción espacio-temporal (Knorr-Held, 2000) y restricciones de suma-cero (Goicoa et al., 2018). . . . . 30
- 6.2 Configuraciones seleccionadas según el índice multicriterio de ajuste. Incluye DIC, WAIC,  $-\log p(y | \theta)$ , parsimonia, tiempo de cómputo, LGOCV, puntaje ponderado y ranking global. Destacan las regionalizaciones con apotemas de 1 500–2 500 m y la interacción Tipo IV. . . . . 65
- 6.4 Veinte configuraciones con mejor desempeño predictivo integrado según el índice  $S(\theta)$ . Se reportan MAE, RMSE e IS para horizontes de 1–3 años. . . . . 71
- 6.5 Cobertura del intervalo de credibilidad del 95 % y sesgo direccional de la mediana posterior por grupo espacial y horizonte de pronóstico. . . . . 73



# Capítulo 1

## Introducción

La seguridad ciudadana constituye uno de los desafíos estructurales más persistentes en América Latina. Según el *Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo* [1] y la *Oficina de las Naciones Unidas contra la Droga y el Delito* [2], la región concentra cerca de un tercio de los homicidios del mundo pese a representar menos del 10 % de la población global, con tasas que superan ampliamente los promedios internacionales. Este fenómeno tiene profundas implicaciones sociales y territoriales: la violencia letal deteriora la confianza institucional, restringe las oportunidades económicas y erosiona la cohesión comunitaria. En Colombia, los avances recientes en materia de seguridad han sido significativos, pero las dinámicas urbanas continúan mostrando altos niveles de heterogeneidad y persistencia espacial del crimen [3, 4, 5]. La combinación entre conflictividad armada, economías ilícitas y desigualdades estructurales ha configurado un panorama complejo en el que los homicidios, los hurtos y las extorsiones siguen afectando de forma directa la calidad de vida de la población.

Medellín constituye un caso paradigmático dentro de este contexto. A comienzos del siglo XXI, la ciudad registraba tasas de homicidio superiores a 170 casos por cada cien mil habitantes, mientras que dos décadas después esas cifras se redujeron en más del 90 %, alcanzando niveles históricamente bajos [4, 5]. Sin embargo, esta mejora general coexiste con una marcada desigualdad territorial: un pequeño conjunto de zonas concentra la mayor parte de los hechos violentos, mientras que amplias áreas permanecen prácticamente libres de homicidios. Investigaciones recientes muestran que menos del 5 % de las cuadras urbanas agrupan más del 50 % de los delitos, patrón consistente con la “ley de concentración del delito” propuesta por [6, 7] y replicada en diversos contextos latinoamericanos [8]. Estas evidencias indican que la violencia urbana no se distribuye aleatoriamente, sino que emerge de interacciones persistentes entre factores espaciales, sociales e institucionales que operan a escalas microterritoriales.

La criminología ambiental ha demostrado de forma consistente que el crimen se genera en función de la estructura del entorno y de las oportunidades que este ofrece. Las teorías de la prevención situacional [9], la economía del comportamiento criminal [10] y las actividades rutinarias [11] coinciden en que los delitos ocurren cuando confluyen en el espacio y el tiempo un ofensor motivado, una víctima o blanco adecuado y la ausencia de guardianes efectivos. De acuerdo con [12], estos procesos se materializan en configuraciones espaciales y temporales específicas que reproducen patrones observables de concentración y persistencia. En

consecuencia, comprender y anticipar el crimen exige un enfoque que integre simultáneamente el espacio, el tiempo y los mecanismos de interacción social que subyacen a la conducta delictiva.

No obstante, buena parte de los diagnósticos institucionales y estudios aplicados en América Latina continúan basándose en el uso de tasas crudas y mapas descriptivos que, si bien aportan una primera aproximación al fenómeno, presentan limitaciones importantes. Estas representaciones no incorporan la incertidumbre estadística ni la dependencia espacial o temporal que caracteriza los datos de criminalidad, y sus resultados pueden variar sustancialmente según la escala y los límites administrativos elegidos, manifestación conocida como el *modifiable areal unit problem* (MAUP) [13, 14]. En ciudades con alta heterogeneidad socioespacial, el uso de unidades político-administrativas desiguales puede generar artefactos interpretativos, sobre-representar áreas de baja población o diluir focos de violencia en agregaciones amplias. Esta problemática demanda avanzar hacia unidades de análisis más homogéneas y comparables, como las grillas hexagonales regulares, y hacia enfoques estadísticos que permitan modelar explícitamente la estructura espacio-temporal del fenómeno.

En este contexto, la presente tesis se propone comparar modelos estadísticos jerárquicos para el análisis y pronóstico de homicidios en Medellín, bajo un marco bayesiano que integra dependencias espaciales y temporales. El objetivo es doble: por un lado, evaluar la capacidad de distintos modelos espacio-temporales para capturar la variación del fenómeno en diferentes escalas; y por otro, generar predicciones territoriales que constituyan insumos útiles para la toma de decisiones en la política pública local. Para ello, se utiliza la metodología de *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA), que permite realizar inferencia bayesiana eficiente en modelos de alta dimensionalidad [15, 16]. Este enfoque se complementa con una estrategia de regionalización espacial contigua basada en criterios de homogeneidad y compacidad geométrica, inspirada en el algoritmo SKATER y en los métodos de optimización en grafos [17, 18], lo que garantiza unidades estables y coherentes para la modelación estadística.

El aporte de esta investigación no reside únicamente en la aplicación de nuevas técnicas, sino en la integración conceptual entre criminología ambiental y modelación estadística avanzada. Al concebir el crimen como un proceso espacio-temporal no aleatorio, los modelos jerárquicos permiten cuantificar la incertidumbre, identificar patrones persistentes y estimar la probabilidad de ocurrencia futura en cada microterritorio. De esta forma, el trabajo se inscribe en una línea contemporánea de análisis criminológico que busca reemplazar la descripción estática del delito por aproximaciones probabilísticas y predictivas, manteniendo la transparencia interpretativa y evitando los enfoques de “caja negra” propios de ciertos modelos de aprendizaje automático [19, 20, 21].

El documento se estructura de la siguiente manera. El Capítulo 2 presenta el planteamiento del problema, contextualizando la evolución reciente del crimen en Medellín y los desafíos de la política pública en materia de seguridad ciudadana. En el Capítulo 3 se presentan los objetivos general y específicos de la tesis. El Capítulo 4 desarrolla el marco teórico y metodológico, abordando los fundamentos de la inferencia bayesiana, los modelos jerárquicos espacio-temporales y las estrategias de regionalización. El Capítulo 5 sintetiza la evolución del análisis espacial del crimen y su convergencia con la modelación bayesiana moderna. En los capítulos siguientes, el Capítulo 6 describe la implementación del análisis, la comparación

de modelos y los resultados predictivos; el Capítulo 7 desarrolla la discusión de implicaciones y limitaciones; y el Capítulo 8 presenta las conclusiones y recomendaciones orientadas a fortalecer la gestión local de la seguridad.

De esta forma esta tesis propone un marco integrado de análisis espacio-temporal del homicidio urbano, sustentado en teoría criminológica, rigor estadístico y pertinencia territorial. Al articular herramientas de la estadística bayesiana con principios de la criminología ambiental, se busca contribuir tanto al avance del conocimiento científico sobre la dinámica del crimen como a la formulación de políticas públicas basadas en evidencia para la ciudad de Medellín.



# Capítulo 2

## Planteamiento del problema

La violencia letal y los delitos contra la vida continúan siendo uno de los mayores desafíos para América Latina. La región ha sido catalogada por la *Oficina de las Naciones Unidas contra la Droga y el Delito* como la más violenta del mundo en términos de homicidios intencionales, con tasas que duplican las de África y cuadruplican las del promedio mundial [2]. Este patrón no puede explicarse únicamente por factores socioeconómicos o demográficos, sino por la persistencia de dinámicas territoriales específicas en las que se combinan la desigualdad social, la fragmentación institucional y la presencia de economías ilegales. En este contexto, la seguridad ciudadana se configura como un problema estructural que trasciende el ámbito policial y exige aproximaciones integrales basadas en evidencia empírica y modelos analíticos sólidos [1].

Colombia, aunque ha logrado avances sustanciales en la reducción del homicidio desde comienzos del siglo XXI, continúa enfrentando niveles elevados de violencia en comparación con estándares internacionales. Entre 2002 y 2022, la tasa nacional pasó de 31,8 a 13,4 homicidios por cada cien mil habitantes, una disminución superior al 50 %, pero con marcadas desigualdades territoriales [4, 5]. Medellín, segundo centro urbano del país, ilustra esta paradoja de transformación y persistencia: la ciudad transitó de ser uno de los epicentros de la violencia global a inicios de los años noventa a un referente de recuperación urbana, con reducciones sostenidas en las tasas de homicidio. Sin embargo, la evidencia reciente muestra que esta mejora general coexiste con microterritorios donde el riesgo de victimización sigue siendo desproporcionadamente alto. En 2022, el 3,8 % de las cuadras concentró el 100 % de los homicidios registrados, patrón que confirma la alta concentración espacial del crimen y la naturaleza no aleatoria de su distribución [8].

Esta persistencia territorial plantea interrogantes fundamentales sobre la dinámica y el control del crimen urbano. A pesar de las políticas locales orientadas a la convivencia y la inclusión social, los homicidios en Medellín continúan reproduciendo patrones espaciales y temporales específicos, vinculados a la estructura del entorno físico, la configuración de redes ilegales y la segregación socioeconómica. Las teorías de la criminología ambiental y de las actividades rutinarias sostienen que el delito es el resultado de la convergencia entre oportunidades situacionales, ausencia de guardianes y presencia de actores motivados [9, 11]. Estas interacciones no se distribuyen de manera homogénea en la ciudad, sino que se

concentran en lugares donde las condiciones físicas y sociales facilitan la comisión del delito. Por tanto, comprender y predecir la violencia urbana requiere un enfoque que incorpore explícitamente la dimensión espacial y temporal en la explicación de los hechos.

Los diagnósticos convencionales basados en tasas crudas, conteos agregados o mapas de calor —aunque ampliamente utilizados por las instituciones públicas— resultan insuficientes para capturar la complejidad de estos fenómenos. Tales aproximaciones son altamente sensibles a la escala y a la forma de las unidades de análisis, lo que introduce sesgos derivados del *modifiable areal unit problem* (MAUP) [13, 14]. En Medellín, por ejemplo, los barrios difieren ampliamente en extensión, densidad poblacional y composición socioeconómica; una misma cifra de homicidios puede implicar riesgos muy distintos según el tamaño del área y la población residente. Además, la mayoría de los análisis institucionales tratan los eventos como independientes entre sí, ignorando las dependencias espaciales y temporales que caracterizan la propagación del crimen. Esta omisión puede conducir a conclusiones erróneas, sobre todo en contextos de alta autocorrelación territorial y persistencia temporal.

A nivel metodológico, los modelos tradicionales de regresión no son adecuados para representar este tipo de dependencias. Por un lado, suponen independencia entre observaciones; por otro, no incorporan la estructura jerárquica de los datos ni permiten cuantificar la incertidumbre de forma probabilística. Estas limitaciones justifican la adopción de modelos jerárquicos espacio-temporales, en particular bajo un enfoque bayesiano, que ofrece una representación coherente de la variabilidad y permite combinar información espacial, temporal y contextual dentro de un mismo marco de inferencia [15, 16]. En este esquema, los homicidios pueden entenderse como realizaciones de un proceso estocástico dependiente del espacio y del tiempo, cuya intensidad subyacente puede estimarse y proyectarse de manera probabilística.

No obstante, la aplicación de estos modelos enfrenta desafíos específicos en contextos urbanos latinoamericanos. La calidad y granularidad de los datos disponibles, la heterogeneidad territorial y la escala a la cual deben tomarse decisiones prácticas requieren ajustar las unidades de observación para garantizar homogeneidad interna y coherencia geométrica. En respuesta a ello, la regionalización espacial —entendida como la construcción de unidades contiguas que agrupan microterritorios similares en términos socio-delictivos— se convierte en una herramienta metodológica esencial. En esta tesis se adopta una estrategia de regionalización basada en grafos y criterios de homogeneidad multivariante inspirada en el algoritmo SKATER [17, 18], con el fin de generar unidades estables, comparables y estadísticamente consistentes. Esta regionalización busca mitigar los efectos del MAUP, mejorar la eficiencia de los modelos bayesianos y facilitar la interpretación territorial de los resultados.

El problema de investigación que orienta este trabajo puede formularse de la siguiente manera: *¿Cómo varía el desempeño inferencial y predictivo de los modelos jerárquicos espacio-temporales bayesianos aplicados al análisis de homicidios en Medellín cuando se utilizan diferentes configuraciones espaciales, comparando grillas elementales de distinta resolución con unidades obtenidas mediante un proceso de regionalización contigua?*

Esta pregunta pone el énfasis en la sensibilidad espacial de los modelos, más que en la comparación entre enfoques estadísticos distintos. El interés central radica en examinar en qué medida la escala y la estructura de agregación territorial inciden en la estabilidad, la

precisión y la interpretabilidad de los resultados obtenidos bajo un mismo marco jerárquico bayesiano.

En consecuencia, el propósito general de la investigación es comparar el desempeño de modelos estadísticos espacio-temporales de tipo bayesiano en el análisis y pronóstico de homicidios en la ciudad de Medellín, utilizando como unidades de observación tanto grillas hexagonales elementales —de diferente tamaño de apotema— como las regiones resultantes de su agrupación mediante un algoritmo de regionalización espacial contigua. Este enfoque permite evaluar la coherencia de las estimaciones frente al cambio de escala y generar insumos útiles para la planeación territorial y la gestión local de la seguridad ciudadana.



# Capítulo 3

## Objetivos

### 3.0.1 Objetivo General

Comparar modelos estadísticos espacio-temporales de análisis y pronóstico de delitos en la ciudad de Medellín generando insumos para la toma informada de decisiones en un gobierno local.

### 3.0.2 Objetivos Específicos

1. Recopilar y preparar la base de datos de delitos. Esta base se construirá utilizando repositorios de acceso público tales como Medata y datos.gov.
2. Seleccionar y aplicar los modelos estadísticos espacio-temporales más adecuados, considerando la disponibilidad de datos y la revisión de literatura.
3. Definir y calcular para cada modelo las métricas de evaluación en términos de ajuste y calidad predictiva.



# Capítulo 4

## Marco de referencia

### 4.1 Estado del arte

El estudio del crimen urbano ha experimentado una profunda transformación metodológica en las últimas décadas, transitando desde la simple descripción cartográfica hacia la modelación espacio-temporal y la predicción probabilística. Este cambio refleja la madurez alcanzada por la criminología ambiental y por la denominada criminología del lugar, las cuales han demostrado que el crimen no se distribuye aleatoriamente en el territorio, sino que se concentra de manera persistente en microespacios urbanos y periodos específicos del tiempo [6, 7, 8, 22]. Tales hallazgos impulsaron una agenda empírica orientada a identificar patrones de concentración, difundir metodologías de análisis espacial y vincular la estructura urbana con las oportunidades delictivas.

Las primeras aproximaciones sistemáticas a la espacialidad del crimen surgieron con la expansión de los Sistemas de Información Geográfica (SIG), que permitieron geocodificar registros policiales y visualizar la distribución de los delitos sobre el territorio. Este enfoque, conocido como *crime mapping*, facilitó la detección de zonas de alta incidencia o *hot spots* mediante herramientas exploratorias como la *Kernel Density Estimation* (KDE), los estadísticos locales de autocorrelación (Getis-Ord  $G_i^*$ , LISA) y los detectores de conglomerados espacio-temporales (*scan statistics*) [23, 24]. A ello se sumaron los métodos de agrupamiento no supervisado —*k-means*, DBSCAN, HDBSCAN— que, al segmentar el espacio urbano según la similitud en los patrones de delito, permitieron capturar la emergencia de microzonas homogéneas [25]. Sin embargo, pese a su utilidad descriptiva, estas técnicas carecían de un marco inferencial formal y no incorporaban mecanismos para cuantificar la incertidumbre ni la dependencia espacio-temporal inherente a los datos.

Posteriormente, la econometría espacial consolidó un segundo momento en la evolución metodológica del análisis del crimen, al introducir modelos que incorporan explícitamente la estructura de vecindad entre áreas. Los modelos de rezago espacial (*Spatial Lag Model*, SLM) y de error espacial (*Spatial Error Model*, SEM) demostraron que las tasas de criminalidad en una unidad geográfica dependen fuertemente de las tasas observadas en sus áreas adyacentes, corrigiendo los sesgos derivados de la omisión de dicha dependencia [26, 27]. Estudios como los

de [28], [29] y [30] evidenciaron que la propagación de los homicidios y otros delitos violentos responde tanto a factores estructurales como a dinámicas espaciales de difusión. En paralelo, las regresiones ponderadas geográficamente (GWR) y sus extensiones para variables de conteo (GWPR, GWNBR) ofrecieron una vía flexible para modelar la heterogeneidad espacial de los coeficientes y revelar la no estacionariedad de los determinantes socioeconómicos del crimen [31, 32, 33, 34]. No obstante, su carácter esencialmente estático y la ausencia de una estructura jerárquica limitaron la integración de la dimensión temporal y la cuantificación rigurosa de la incertidumbre.

El desarrollo de los modelos jerárquicos bayesianos espacio–temporales marcó un punto de inflexión al trasladar a la criminología los avances de la epidemiología espacial. Estos modelos permitieron suavizar tasas en áreas pequeñas, descomponer la variabilidad estructurada y no estructurada y establecer un marco probabilístico coherente para el análisis de conteos raros, como los homicidios [35, 36]. La introducción de la *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA) [15, 37] y la formulación de los campos aleatorios a través de ecuaciones diferenciales estocásticas (SPDE) [38] posibilitaron la estimación eficiente de modelos complejos sin recurrir a simulaciones intensivas, favoreciendo su aplicación a dominios urbanos de alta resolución espacial. En el ámbito criminológico, [39] demostraron la capacidad de INLA para modelar superficies dinámicas de riesgo a partir de datos delictivos, mientras que [40] exploraron sus límites predictivos en entornos heterogéneos, destacando la necesidad de equilibrar suavizado, complejidad e interpretabilidad.

En paralelo, los desarrollos recientes en epidemiología espacial han fortalecido los fundamentos técnicos de los modelos jerárquicos espacio–temporales utilizados en criminología. Trabajos como los de [41, 42, 19] ampliaron la capacidad de la inferencia bayesiana mediante *INLA* para abordar dominios de gran tamaño y alta resolución espacial, introduciendo esquemas escalables de inferencia paralela y enfoques de tipo *divide-and-conquer*. Aunque estos avances se originan en la vigilancia epidemiológica y la predicción de mortalidad, sus aportes metodológicos—en particular la evaluación comparativa de las estructuras de interacción espacio–tiempo propuestas por [43] y el uso sistemático de métricas como DIC, WAIC y LGOCV—constituyen antecedentes valiosos para el modelamiento de fenómenos urbanos de baja incidencia, como el homicidio.

Estas contribuciones también evidencian cómo la frontera entre la epidemiología y la criminología cuantitativa se ha ido diluyendo, a medida que los modelos jerárquicos bayesianos espacio–temporales se aplican a nuevas formas de violencia. Por ejemplo, Vicente, Goicoa y Ugarte [39] emplearon modelos multivariados con *INLA* para analizar simultáneamente las tasas de violación y de muertes por dote en Uttar Pradesh (India, 2001–2014), demostrando la utilidad de las estructuras de interacción espacio–tiempo tipo II y la robustez de los priors espaciales *BYM2* y *DCAR*. Su estudio no sólo confirmó la equivalencia entre los enfoques *INLA* y *MCMC*, sino que mostró la capacidad del enfoque bayesiano para capturar correlaciones espaciales y temporales entre diferentes manifestaciones del crimen.

En América Latina, Carcach [44] adaptaron un modelo jerárquico con interacción espacio–tiempo tipo IV al análisis del homicidio en El Salvador (2002–2021), revelando patrones persistentes de riesgo espacial y memoria temporal de la violencia. En conjunto, estos trabajos consolidan una línea de investigación que extiende los modelos epidemiológicos hacia la

criminología, integrando rigor estadístico, eficiencia computacional e interpretabilidad en el estudio de fenómenos sociales complejos.

La reformulación del modelo BYM en su versión escalada BYM2 [20] y el uso de *priors* de complejidad penalizada (PC-priors) [45] aportaron estabilidad numérica y mayor interpretabilidad a los efectos espaciales, reforzando la coherencia jerárquica entre los componentes del modelo. Estos avances abrieron la posibilidad de combinar estructuras autorregresivas con componentes no estacionarios, fortaleciendo la capacidad de los modelos para capturar variaciones locales y efectos de frontera en dominios urbanos de alta heterogeneidad.

A la par, la literatura reciente ha explorado la convergencia entre la inferencia bayesiana y los enfoques de pronóstico espacial. [46] desarrollaron modelos de convergencia beta espacial para la predicción de tasas municipales de criminalidad, subrayando la importancia de incorporar la dependencia espacial en los ejercicios de pronóstico. Asimismo, los avances en disponibilidad de datos abiertos y capacidades computacionales han impulsado la adopción de técnicas de aprendizaje automático y profundo (*Machine Learning, Deep Learning*) en la predicción del crimen [47, 48, 49, 50, 51, 52, 53]. Sin embargo, la mayoría de estos métodos operan como una *caja negra*, privilegiando la precisión sobre la interpretabilidad y mostrando dificultades de calibración probabilística y transferibilidad entre contextos urbanos heterogéneos [54, 55, 56]. Frente a ello, los modelos jerárquicos bayesianos ofrecen una alternativa explicable y probabilísticamente coherente que permite integrar la incertidumbre, modelar dependencias estructurales y comunicar resultados de manera transparente para la toma de decisiones públicas.

A pesar de estos avances, persisten vacíos metodológicos relevantes. Uno de los más notorios es el impacto de la escala y la forma de las unidades espaciales sobre las estimaciones y predicciones del crimen, conocido como el *Modifiable Areal Unit Problem* (MAUP) [13, 14]. La elección arbitraria de límites administrativos o tamaños de celda puede inducir sesgos significativos en la inferencia espacial, especialmente en fenómenos de baja incidencia. Si bien se han propuesto estrategias de regionalización contigua basadas en grafos y optimización multicriterio —como el algoritmo SKATER— para definir unidades homogéneas, contiguas y estadísticamente estables [18, 57], su aplicación sistemática en el análisis bayesiano del crimen sigue siendo limitada. Además, la literatura carece de comparaciones controladas que evalúen cómo la regionalización afecta el ajuste y la capacidad predictiva de los modelos espacio-temporales cuando los demás componentes estructurales se mantienen constantes.

La presente investigación se sitúa precisamente en ese punto de intersección entre la inferencia bayesiana, la estadística espacial y la evaluación de escala. A diferencia de los estudios que comparan familias de modelos heterogéneas, este trabajo mantiene fijo el marco jerárquico bayesiano y analiza el efecto de la regionalización espacial sobre su estabilidad y desempeño predictivo. Se comparan grillas hexagonales elementales de distinto tamaño con sus agregaciones contiguas y con divisiones administrativas tradicionales, evaluando cada configuración mediante métricas probabilísticas (DIC, WAIC, LGOCV) y validación temporal con ventanas deslizantes. De esta forma, la tesis aporta evidencia sobre la relación entre escala espacial, estabilidad inferencial y capacidad predictiva, contribuyendo al desarrollo de una criminología computacional explicable y estadísticamente rigurosa, capaz de generar insumos confiables para la planificación y gestión de la seguridad urbana.

## 4.2 Marco teórico

### 4.2.1 Fundamentos teóricos del crimen y su expresión espacial

La comprensión contemporánea del crimen urbano se desplaza desde enfoques centrados en el individuo hacia aproximaciones que resaltan el papel del entorno físico y social. La criminología ambiental y la teoría de los lugares sostienen que la ocurrencia del delito no es aleatoria, sino que responde a la interacción entre oportunidades situacionales, dinámicas poblacionales y configuraciones espaciales que facilitan o restringen la conducta delictiva [9, 6, 58]. En este marco, la ciudad se concibe como una red de microterritorios donde la accesibilidad, el uso del suelo, los flujos de movilidad y el control informal configuran patrones persistentes de concentración del crimen. Esta regularidad es coherente con la Primera Ley de la Geografía [59], según la cual las unidades cercanas tienden a estar más relacionadas, justificando la presencia de autocorrelación espacial en indicadores de criminalidad y el recurso a modelos que capten dependencias entre áreas vecinas.

Uno de los hallazgos más sólidos es la concentración desproporcionada del delito en puntos o superficies muy acotadas del territorio. Investigaciones pioneras en Minneapolis [22] y Seattle [6] muestran que un pequeño porcentaje de segmentos viales o intersecciones acumula una fracción notable de los eventos. Evidencia posterior en contextos latinoamericanos confirma niveles altos de concentración espacial, con una pequeña porción de cuadras urbanas que concentran la totalidad de ciertos delitos [8]. La denominada “ley de concentración del crimen” [7] sintetiza esta regularidad y subraya la necesidad de enfoques analíticos capaces de identificar focos persistentes (*hot spots*) y su dinámica.

La dimensión temporal es igualmente estructurante. La teoría de las actividades rutinarias [11] plantea que el delito emergen cuando convergen infractor motivado, objetivo idóneo y ausencia de guardianía capaz, lo que genera regularidades a escalas horarias, diarias o estacionales [12]. Estos ciclos se articulan con patrones de movilidad, horarios laborales y usos del espacio, de modo que la concentración no solo se observa en lugares específicos, sino también en intervalos temporales recurrentes. La combinación espacio-tiempo produce, por tanto, clústeres que requieren herramientas que integren ambas dimensiones para una descripción fiel y una inferencia adecuada.

La teoría de la desorganización social [60] añade la dimensión comunitaria: la cohesión social, la estabilidad residencial y los niveles de desventaja socioeconómica condicionan la capacidad de control informal y, en consecuencia, modulan la exposición al riesgo delictivo. En contextos urbanos con desigualdad socioespacial y segregación residencial, la presencia institucional heterogénea y la movilidad poblacional refuerzan esas asimetrías territoriales.

Estas tradiciones —elección racional [10], actividades rutinarias [11], criminología ambiental [6, 58] y desorganización social [60]— convergen en una lectura integrada: el riesgo delictivo varía de forma estructurada en el espacio y el tiempo como resultado de incentivos contextuales, rutinas de interacción y heterogeneidad comunitaria. De este marco se desprenden dos implicaciones metodológicas. En primer lugar, se requiere modelar la dependencia entre unidades territoriales cercanas y entre periodos consecutivos, atendiendo a la autocorrelación y al *borrowed strength* necesario en áreas con pocos eventos. En segundo lugar, se vuelve

crucial cuantificar la incertidumbre de manera explícita para distinguir fluctuaciones aleatorias de patrones persistentes. La modelación jerárquica espacio–temporal bajo un enfoque bayesiano resulta particularmente apropiada, al permitir separar efectos espaciales y temporales (estructurados y no estructurados), incorporar interacciones espacio–temporales, e integrar conocimiento previo sobre escalas de variación y suavizado.

Finalmente, la correcta representación del espacio es parte del problema teórico. La manera en que se definen unidades, fronteras y escalas incide en la medición de la concentración y en la inferencia subsiguiente. Este enlace entre teoría criminológica y decisión cartográfica se desarrolla en la subsección siguiente al discutir el *Modifiable Areal Unit Problem* (MAUP) y las estrategias de regionalización que buscan soportes espaciales coherentes para la modelación.

## 4.2.2 El espacio geográfico y el problema del MAUP

El territorio no es un telón de fondo neutral: condiciona las interacciones sociales y los patrones de comportamiento que se observan. En análisis espacial, este principio —articulado por la Primera Ley de la Geografía [59]— implica que la medición del riesgo y la detección de patrones dependen de cómo se define, agrupa y representa el espacio. El *Modifiable Areal Unit Problem* (MAUP) [13, 14] formaliza esta dependencia al mostrar que las conclusiones estadísticas pueden variar sustancialmente con cambios en la escala (tamaño de las unidades) o en la zonificación (trazado de fronteras), aun cuando la base de datos sea la misma.

El MAUP se manifiesta en dos efectos. El *efecto de escala* se produce cuando la agregación en unidades mayores (p. ej., de manzanas a barrios o comunas) reduce la variabilidad local y puede atenuar contrastes espaciales, alterando estimaciones e incertidumbres. El *efecto de zonificación* aparece cuando, manteniendo el número de unidades, se modifica el diseño de sus fronteras; distintas configuraciones de vecindad pueden generar estimaciones o relaciones diferentes entre variables, afectando tanto la valoración del riesgo como la significancia de covariables [14, 61]. En aplicaciones con indicadores de baja incidencia, como homicidios, estas sensibilidades son especialmente relevantes: tasas aparentemente estables o dispersas pueden ser artefactos de la escala elegida, y los *hot spots* pueden desplazarse con cambios de zonificación.

Frente a estos problemas, se han propuesto dos vías complementarias. La primera consiste en emplear *grillas regulares* (cuadradas o hexagonales) que homogeneizan forma y tamaño de las unidades, reducen la dependencia de divisiones administrativas y facilitan comparaciones entre zonas [62]. Esta estrategia aporta regularidad geométrica, pero exige decidir una resolución adecuada: celdas muy finas amplifican la varianza de las tasas y la inestabilidad inferencial; celdas muy gruesas diluyen variación espacial relevante. La segunda vía recurre a *procedimientos de regionalización óptima*, que agrupan unidades contiguas para formar regiones internamente homogéneas y estadísticamente estables, usando teoría de grafos, métricas multivariantes y criterios de contigüidad [18, 57, 63]. Estos métodos permiten construir soportes espaciales adaptados a los datos, disminuyendo la heterogeneidad interna sin perder la coherencia espacial necesaria para la interpretación.

Conceptualmente, la regionalización no debe entenderse como una etapa puramente cartográfica previa, sino como parte integral del proceso de modelación. La elección del soporte espacial

afecta la estructura de vecindad, la forma de las matrices de precisión en los efectos espaciales, la estabilidad de los hiperparámetros (cuando se usan versiones escaladas de ICAR/BYM2) y, en última instancia, el desempeño predictivo. En modelos jerárquicos espacio–temporales, un soporte adecuado mejora el *borrowed strength* entre unidades, hace más interpretable el balance entre variación estructurada y no estructurada y contribuye a una cuantificación de incertidumbre más estable.

No existe una escala “neutral” para estudiar el crimen. Por ello, la selección de resolución y la eventual regionalización contigua deben justificarse a partir de objetivos analíticos (estimación estable y pronóstico), propiedades geométricas (homogeneidad de forma y tamaño) y criterios estadísticos (estabilidad de estimaciones e incertidumbres). En este sentido, el MAUP no solo advierte sobre sesgos potenciales, sino que orienta decisiones de diseño espacial que fortalecen la coherencia inferencial de los modelos bayesianos espacio–temporales y su utilidad para comprender la dinámica del crimen.

### 4.2.3 Regionalización espacial y control del MAUP

Siguiendo la discusión previa sobre el problema del MAUP y la necesidad de definir unidades de análisis que controlen los sesgos de escala y zonificación, esta sección operacionaliza la *regionalización contigua* como un problema de optimización sobre grafos. El objetivo es construir regiones internamente homogéneas y estadísticamente estables, preservando la contigüidad espacial y una compacidad geométrica suficiente para la posterior modelación espacio–temporal.

La regionalización espacial constituye un procedimiento fundamental para sintetizar información geográfica y optimizar la estructura territorial del análisis estadístico. Su propósito es construir una partición contigua del dominio areal  $\mathbf{V} = \{1, \dots, n\}$  en un conjunto de regiones  $\mathcal{P} = \{R_1, \dots, R_K\}$  que maximicen la homogeneidad interna de las variables sustantivas, respeten las restricciones geométricas de contigüidad y compacidad, y mantengan una escala adecuada para la inferencia y la predicción de fenómenos espacio–temporales. En este sentido, la regionalización busca identificar agrupamientos espaciales que representen unidades territoriales coherentes tanto desde el punto de vista socio–demográfico como desde la perspectiva estadística del modelado.

Este problema se enmarca en la literatura de *spatial regionalization* y está estrechamente vinculado con el *Modifiable Areal Unit Problem* (MAUP) discutido anteriormente [13, 14]. En respuesta a este desafío, se han desarrollado estrategias de partición espacial basadas en grafos y optimización combinatoria [18, 63], entre las que destacan los métodos de corte sobre árboles generadores mínimos (*MST-cut*), como el algoritmo SKATER [57]. En este trabajo, se adopta una extensión de dicho enfoque que combina una métrica de similitud multivariante con regularización, mecanismos para asegurar la conectividad global del grafo y la compacidad geométrica de las regiones, así como restricciones explícitas sobre tamaño y exposición mínima. Estas modificaciones permiten obtener particiones territoriales más estables, coherentes y estadísticamente informativas para su posterior incorporación en modelos espacio–temporales de conteo.

### Definición y objetivo de homogeneidad

La regionalización espacial se formaliza como un problema de optimización sobre un grafo de contigüidad que representa la estructura espacial del territorio. Sea  $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  un grafo simple y no dirigido, donde los vértices  $\mathbf{V} = \{1, \dots, n\}$  corresponden a las unidades espaciales elementales (barrios o celdas de grilla) y las aristas  $\mathbf{E}$  codifican relaciones de vecindad geométrica. Cada unidad  $i \in \mathbf{V}$  se asocia con un polígono  $A_i \subset \mathbb{R}^2$ , y la contigüidad se define a partir de la intersección de sus fronteras.

Dos unidades  $i$  y  $j$  se consideran vecinas en el sentido *rook* cuando comparten un borde de longitud positiva, esto es, cuando la intersección de sus fronteras  $\partial A_i \cap \partial A_j$  contiene un segmento con medida de longitud mayor que cero. En el sentido *queen*, se consideran vecinas cuando comparten al menos un punto (ya sea en borde o vértice), es decir, cuando  $\overline{A_i} \cap \overline{A_j} \neq \emptyset$ . Para evitar contactos artificiales debidos a imperfecciones cartográficas o polígonos con bordes imprecisos (*slivers*), se introduce una tolerancia  $\varepsilon > 0$ : en *rook* se exige  $\text{length}(\partial A_i \cap \partial A_j) > \varepsilon$ , mientras que en *queen* se permite contacto puntual siempre que no sea numéricamente espurio.

Estas definiciones inducen una matriz de adyacencia binaria y simétrica  $\mathbf{W} = (W_{ij})$ , con  $W_{ij} = 1$  si  $i$  y  $j$  son vecinos y  $W_{ij} = 0$  en caso contrario. A partir de ella se construye la matriz de grados  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_i)$ , con  $d_i = \sum_j W_{ij}$ , y el laplaciano  $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$ , base de los modelos autoregresivos espaciales (CAR e ICAR) utilizados en la inferencia bayesiana.

La estructura de vecindad se fundamenta en los principios de interacción espacial discutidos en la sección anterior, y aquí se formaliza mediante la matriz de adyacencia  $\mathbf{W}$ , que define explícitamente los vínculos topológicos entre unidades. En aplicaciones urbanas, la base areal puede estar dada por una grilla regular (p.ej., hexágonos) por su homogeneidad geométrica y facilidad de agregación, aunque el procedimiento de regionalización propuesto no depende de una forma específica, siempre que exista un grafo de contigüidad bien definido.

Para cada unidad  $i \in \mathbf{V}$  se observa un vector de atributos  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})^\top \in \mathbb{R}^p$ , que resume las  $p$  características relevantes del territorio, tales como tasas de homicidio, indicadores socioeconómicos o condiciones de vulnerabilidad. El objetivo es construir una partición contigua  $\mathcal{P} = \{R_1, \dots, R_K\}$  del dominio  $\mathbf{V}$  en  $K$  subconjuntos disjuntos y exhaustivos, de modo que cada subgrafo inducido por  $R_k$  sea conexo, garantizando coherencia geométrica e interpretación territorial.

La calidad de una partición se evalúa mediante una medida de heterogeneidad intrarregional que penaliza la disimilitud al interior de cada región:

$$\mathcal{H}(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^K \sum_{i,j \in R_k} \omega_{ij} d(i, j), \quad (4.1)$$

donde  $d(i, j)$  representa la distancia o disimilitud entre las unidades  $i$  y  $j$  en el espacio de atributos, y  $\omega_{ij} \geq 0$  pondera su contribución según criterios topológicos o de exposición. El problema consiste en minimizar  $\mathcal{H}(\mathcal{P})$  bajo restricciones de contigüidad y condiciones mínimas de tamaño y exposición para cada región, de modo que las áreas resultantes contengan suficiente información para la estimación y el pronóstico. Este marco conecta naturalmente con los enfoques basados en árboles generadores mínimos, que permiten obtener soluciones

contiguas y computacionalmente eficientes mediante cortes sobre las aristas de mayor costo [18, 57, 63].

### Métrica de similitud multivariante y componente geográfico

Para definir la disimilitud entre unidades espaciales adyacentes se combina información atributiva y geográfica. Sea  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  la matriz de atributos estandarizados, con filas  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^\top$ . Para mitigar los efectos de colinealidad entre variables o de tamaños muestrales moderados, se utiliza una estimación regularizada de la matriz de covarianza mediante el estimador de Ledoit–Wolf [64] y su extensión de [65], lo que garantiza que la matriz resultante sea positiva definida incluso cuando  $p$  es comparable con  $n$ .

La disimilitud multivariante entre dos unidades espaciales  $i$  y  $j$  se define mediante una versión regularizada de la distancia de Mahalanobis:

$$d_{\text{attr}}(i, j) = \sqrt{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^\top \widehat{\Sigma}_\lambda^{-1} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}, \quad (4.2)$$

y se combina con un componente geográfico  $d_{\text{geo}}(i, j)$ , calculado como la distancia geodésica entre los centroides de  $i$  y  $j$ , reescalada al intervalo  $[0, 1]$ . La métrica total se define como:

$$c_{ij} = \alpha d_{\text{attr}}(i, j) + (1 - \alpha) d_{\text{geo}}(i, j), \quad \alpha \in [0, 1], \quad (4.3)$$

donde  $\alpha$  regula el equilibrio entre similitud socioeconómica y proximidad geográfica. A fin de promover la compacidad geométrica, se introduce una penalización inversamente proporcional a la longitud del borde compartido  $B_{ij}$ :

$$\omega_{ij} = c_{ij} \left(1 + \lambda_{\text{comp}} (B_{ij} + \varepsilon)^{-1}\right), \quad \lambda_{\text{comp}} \geq 0, \quad \varepsilon > 0, \quad (4.4)$$

lo que desalienta contactos mínimos o discontinuidades espurias [18].

### Árbol generador mínimo y garantía de contigüidad

Definido el grafo ponderado  $(\mathbf{V}, \mathbf{E}, \boldsymbol{\omega})$ , la regionalización se obtiene mediante la construcción de un árbol generador mínimo (*minimum spanning tree*, MST) que resume las conexiones esenciales del territorio bajo el criterio de menor disimilitud acumulada. Cada vértice  $v_i \in \mathbf{V}$  representa una unidad espacial elemental, mientras que cada arista  $(i, j) \in \mathbf{E}$  conecta dos unidades contiguas con peso  $\omega_{ij} > 0$ . Para cada componente conexa del grafo se identifica un subgrafo  $\mathbf{T} \subset \mathbf{E}$  que minimiza la suma total de pesos:

$$\mathbf{T} = \arg \min_{\mathbf{T}' \subset \mathbf{E}} \sum_{(i,j) \in \mathbf{T}'} \omega_{ij},$$

de modo que el árbol resultante conecta todos los vértices con el menor costo posible sin romper la contigüidad espacial [66, 67]. Al eliminar las  $K - C$  aristas de mayor peso se obtienen exactamente  $K$  subárboles conexos que definen una partición contigua  $\mathcal{P} = \{R_1, \dots, R_K\}$ . Este principio constituye la base del algoritmo SKATER (*Spatial ‘K’luster Analysis by Tree Edge Removal*) [57].

## Selección del número de regiones y restricciones de estabilidad

El número de regiones  $K$  se selecciona buscando el equilibrio entre homogeneidad interna y diferenciación externa. Se emplean indicadores de calidad particional como la *silhouette* promedio [68] y la *gap statistic* [69], complementados con un heurístico derivado del MST que identifica rupturas naturales en la jerarquía de similitudes. Además, se imponen restricciones duras que garantizan la validez estadística: cada región debe contener al menos  $m_{\text{mín}}$  unidades y una exposición total no inferior a  $E_{\text{mín}}$ ,

$$|R_k| \geq m_{\text{mín}}, \quad \sum_{i \in R_k} E_i \geq E_{\text{mín}},$$

evitando inestabilidad de tasas en áreas de baja exposición [36]. Cuando una partición viola estas condiciones, la región deficiente se fusiona con su vecina más similar según el costo medio de frontera, preservando la conectividad global del grafo y la compacidad geométrica [70].

La regionalización espacial contigua constituye un paso esencial en la construcción de modelos espacio-temporales estables e interpretables, al definir el soporte territorial óptimo para la inferencia bayesiana y el pronóstico de fenómenos de baja incidencia como los homicidios.

### 4.2.4 Conceptos básicos de estadística Bayesiana

La inferencia Bayesiana constituye un marco formal para el análisis estadístico en el cual la incertidumbre acerca de parámetros desconocidos se modela mediante distribuciones de probabilidad. En este enfoque, todo parámetro de interés  $\theta \in \Theta$  se concibe como una variable aleatoria, sobre la cual se incorpora tanto información previa (a través de una distribución *a priori*) como la evidencia empírica proveniente de los datos (a través de la función de verosimilitud). El resultado de esta actualización se expresa en la distribución *a posteriori*, que condensa de forma coherente toda la información disponible acerca de  $\theta$  [71, 72].

#### Probabilidad condicional

El concepto fundamental de probabilidad condicional se formula como punto de partida. Dados dos eventos  $A$  y  $B$  con  $P(B) > 0$ , se define

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (4.5)$$

Esta definición expresa la probabilidad de que ocurra  $A$  bajo el conocimiento de que  $B$  ya ha ocurrido. En el contexto de variables aleatorias, si  $X$  es una variable aleatoria y  $\theta$  un parámetro, se escribe la densidad condicional como

$$p(x | \theta) = \frac{p(x, \theta)}{p(\theta)}, \quad \text{con } p(\theta) > 0, \quad (4.6)$$

donde  $p(x, \theta)$  es la densidad conjunta de  $(X, \theta)$ . Esta expresión da origen a la noción de *función de verosimilitud*.

## Función de verosimilitud

La función de verosimilitud se define como

$$L(\theta) = p(x | \theta), \quad (4.7)$$

la cual describe la plausibilidad relativa de los diferentes valores de  $\theta$  dados los datos observados  $x$ . Es importante enfatizar que, aunque  $p(x | \theta)$  es una función de  $x$  para un  $\theta$  fijo (densidad/másica de probabilidad), una vez observados los datos  $x$  se interpreta como una función en el espacio paramétrico  $\Theta$ , y por ello se utiliza la notación  $L(\theta)$ .

## Teorema de Bayes

A partir de (4.5), se obtiene el teorema de Bayes para eventos:

$$P(B | A) = \frac{P(A | B) P(B)}{P(A)}. \quad (4.8)$$

En inferencia estadística, el teorema se expresa en términos de distribuciones de probabilidad:

$$p(\theta | x) = \frac{p(x | \theta) p(\theta)}{p(x)} = \frac{L(\theta) p(\theta)}{\int_{\Theta} L(\theta) p(\theta) d\theta}, \quad (4.9)$$

donde:

- $L(\theta) = p(x | \theta)$  es la verosimilitud de los datos,
- $p(\theta)$  es la distribución *a priori*,
- $p(x)$  es la *evidencia* o marginal de los datos, que asegura la normalización.

Así, la distribución *a posteriori* se puede expresar de forma proporcional como

$$p(\theta | x) \propto L(\theta) p(\theta). \quad (4.10)$$

## Distribución *a priori*

La distribución *a priori*  $p(\theta)$  formaliza el grado de creencia inicial sobre  $\theta$  antes de observar los datos. Su elección es crucial en la práctica Bayesiana, pues puede ser:

- **Informativa**, cuando incorpora conocimiento experto, resultados de estudios previos o restricciones teóricas.
- **No informativa o débilmente informativa**, cuando se busca minimizar la influencia del juicio subjetivo y permitir que los datos dominen la inferencia.

En modelos jerárquicos, es habitual que la distribución *a priori* dependa de hiperparámetros  $\varepsilon$ , de modo que  $p(\theta | \varepsilon)$ , permitiendo que estructuras espaciales, temporales o espacio-temporales compartan información a través de dichos hiperparámetros. Esto será de particular relevancia en el marco de modelos Gaussianos Latentes (LGM) y en la metodología INLA.

### Distribución *a posteriori*

La distribución *a posteriori* en (4.10) constituye la pieza central de la inferencia Bayesiana, condensa tanto la información previa como la evidencia dada por la muestra (verosimilitud) y permite derivar, de manera coherente, estimaciones puntuales y medidas de incertidumbre. Entre las medidas *a posteriori* más relevantes se encuentran:

**Media *a posteriori*:**

$$\mathbb{E}[\theta | x] = \int_{\Theta} \theta p(\theta | x) d\theta \quad (4.11)$$

**Mediana *a posteriori*:**

$$\theta_{0,5} \text{ tal que } P(\theta \leq \theta_{0,5} | x) = 0,5 \quad (4.12)$$

**Moda *a posteriori* (MAP):**

$$\theta_{\text{MAP}} = \arg \max_{\theta \in \Theta} p(\theta | x) \quad (4.13)$$

### Intervalos de credibilidad

Un intervalo de credibilidad de nivel  $(1 - \alpha)$  se define como el subconjunto  $(\theta_L, \theta_U)$  del espacio paramétrico que satisface

$$P(\theta \in (\theta_L, \theta_U) | x) = 1 - \alpha. \quad (4.14)$$

A diferencia de los intervalos de confianza frecuentistas, que tienen una interpretación en términos de repetición muestral, los intervalos de credibilidad tienen una interpretación probabilística directa: expresan la probabilidad *a posteriori* de que el parámetro se encuentre dentro del intervalo dado los datos observados.

## 4.2.5 Modelos jerárquicos Bayesianos

Una de las principales fortalezas del enfoque Bayesiano radica en su capacidad para estructurar el análisis estadístico mediante *modelos jerárquicos*. Estos modelos permiten descomponer el problema en diferentes niveles, representando de forma explícita tanto la distribución de los datos como la incertidumbre sobre parámetros latentes y sobre hiperparámetros que regulan su comportamiento. El resultado es un marco flexible y expresivo que facilita la incorporación de dependencias espaciales, temporales o espacio-temporales [71, 72, 73].

### Estructura general

Sea  $y = (y_1, \dots, y_n)$  el vector de observaciones. En un modelo jerárquico Bayesiano típico se distinguen tres niveles [74]:

1. **Nivel de datos (verosimilitud):** describe la distribución de las observaciones condicionadas a los parámetros latentes  $\theta$  y a los hiperparámetros  $\varepsilon$ :

$$p(y | \theta, \varepsilon) = \prod_{i=1}^n p(y_i | \theta_i, \varepsilon). \quad (4.15)$$

2. **Nivel de parámetros latentes:** especifica la distribución a priori de los parámetros  $\theta$  dado un conjunto de hiperparámetros  $\varepsilon$ :

$$p(\theta \mid \varepsilon). \quad (4.16)$$

Este nivel permite introducir estructuras de dependencia (por ejemplo, espaciales o temporales) y controlar la variabilidad de los efectos mediante hiperparámetros.

3. **Nivel de hiperparámetros:** asigna distribuciones a priori a los hiperparámetros  $\varepsilon$ , que habitualmente controlan precisiones o varianzas:

$$p(\varepsilon). \quad (4.17)$$

### Distribución conjunta y posteriori

La especificación jerárquica completa determina la distribución conjunta de observaciones, parámetros latentes e hiperparámetros:

$$p(y, \theta, \varepsilon) = p(y \mid \theta, \varepsilon) p(\theta \mid \varepsilon) p(\varepsilon). \quad (4.18)$$

A partir de esta, la distribución a posteriori se obtiene mediante el teorema de Bayes:

$$p(\theta, \varepsilon \mid y) \propto p(y \mid \theta, \varepsilon) p(\theta \mid \varepsilon) p(\varepsilon). \quad (4.19)$$

El objetivo de la inferencia Bayesiana consiste en obtener distribuciones marginales a posteriori de interés, tanto para parámetros individuales como para hiperparámetros:

$$p(\theta_i \mid y) = \int p(\theta_i, \varepsilon \mid y) d\varepsilon, \quad (4.20)$$

$$p(\varepsilon_r \mid y) = \int p(\varepsilon \mid y) d\varepsilon_{-r}. \quad (4.21)$$

### Ventajas del enfoque jerárquico

El enfoque jerárquico en estadística Bayesiana presenta una serie de ventajas que lo convierten en una herramienta fundamental para el modelado de fenómenos complejos. En primer lugar, su *modularidad* permite descomponer el análisis en distintos niveles (datos, parámetros latentes e hiperparámetros), lo que facilita la construcción, interpretación y extensión de modelos de alta complejidad. Además, este marco posibilita un *intercambio de información* entre parámetros a través de los hiperparámetros, lo que resulta esencial cuando algunas unidades de análisis disponen de información limitada, ya que las estimaciones pueden beneficiarse de la información compartida con otras unidades [73]. Otra característica central es su *flexibilidad*, ya que permite incorporar de manera natural dependencias estructuradas en el espacio y en el tiempo, así como combinaciones espacio-temporales, lo cual es indispensable en estudios aplicados en epidemiología y criminología. Finalmente, la *consistencia probabilística* asegura que todas las fuentes de incertidumbre se integren en un marco unificado, en el cual cada nivel se articula coherentemente con los demás, garantizando inferencias robustas y coherentes [75, 73]. En conjunto, estas propiedades explican por qué los modelos jerárquicos constituyen la base de metodologías modernas como los Modelos Gaussianos Latentes (LGM) y el método INLA, que se abordan en secciones posteriores.

## Relevancia para aplicaciones espacio–temporales

En el análisis de fenómenos complejos como la dinámica de homicidios en Medellín, la estructura jerárquica resulta indispensable. El primer nivel describe la distribución de los conteos observados (p. ej., mediante un modelo de Poisson). El segundo nivel permite incorporar efectos espaciales y temporales, representando heterogeneidades entre regiones o periodos. Finalmente, el tercer nivel modela los hiperparámetros que regulan la precisión de dichos efectos. Esta organización en tres capas hace posible una inferencia robusta y una interpretación clara de las diferentes fuentes de variación presentes en los datos [15].

### 4.2.6 Medidas clásicas de estimación de riesgo

En estudios espacio–temporales con unidades pequeñas (microterritorios) y periodos anuales, las medidas clásicas de riesgo constituyen un punto de partida para la comparación entre zonas. No obstante, estas medidas pueden resultar extremadamente variables cuando la población es reducida o la incidencia es baja, por lo que suelen complementarse con técnicas de suavizamiento y modelos jerárquicos. Sean  $i \in \{1, \dots, n\}$  la unidad espacial y  $t \in \{1, \dots, T\}$  el año de referencia. Denótese por  $y_{it}$  el número de casos observados y por  $P_{it}$  la población total en riesgo [76].

**Tasas crudas.** La tasa cruda anual por cada 100,000 habitantes se define como

$$TC_{it} = \frac{y_{it}}{P_{it}} \times 100,000. \quad (4.22)$$

Este indicador describe la proporción de casos respecto a la población expuesta y es útil para cartografía y análisis exploratorios. Sin embargo, al no desagregar por estructura demográfica (p. ej., edad o sexo), puede inducir comparaciones sesgadas entre zonas con perfiles poblacionales distintos y presenta alta variabilidad cuando  $P_{it}$  es pequeño.

**Estandarización indirecta y razón estandarizada (SMR).** Para mejorar la comparabilidad entre unidades con estructuras demográficas diferentes se recurre a la estandarización indirecta. Sea  $j = 1, \dots, J$  el índice de grupo (p. ej., grupos de edad). Defínase la tasa de referencia de dicho grupo como

$$r_j^{\text{ref}} = \frac{y_j}{P_j},$$

donde  $y_j$  y  $P_j$  son, respectivamente, el total de casos y la población del grupo  $j$  en la población de referencia (por ejemplo, el total del territorio y periodo de estudio). Si  $P_{itj}$  es la población del grupo  $j$  en  $(i, t)$ , el número *esperado* de casos en  $(i, t)$  viene dado por

$$e_{it} = \sum_{j=1}^J P_{itj} \frac{y_j}{P_j}. \quad (4.23)$$

La razón estandarizada se define entonces como

$$SMR_{it} = \frac{y_{it}}{e_{it}}. \quad (4.24)$$

Valores  $SMR_{it} > 1$  indican más casos de los esperados dados los perfiles demográficos locales, mientras que  $SMR_{it} < 1$  indica menos de los esperados. A diferencia de la tasa cruda, la SMR controla por la composición en grupos y, por ende, resulta más adecuada para contrastes transversales; con todo, puede seguir mostrando inestabilidad cuando  $e_{it}$  es pequeño.

En aplicaciones a crimen en microterritorios urbanos,  $y_{it}$  representa el número de homicidios observados y  $P_{it}$  la población residente. La tasa cruda (4.22) ofrece una lectura inmediata de niveles anuales por microterritorio, mientras que la SMR (4.24) permite ajustar por diferencias demográficas cuando se dispone de desagregación por grupos. Dado el tamaño de algunas unidades y la posible escasez de eventos, ambos indicadores sirven como descriptores preliminares y de control de coherencia, pero su variabilidad motiva la incorporación de modelos espacio-temporales que estabilicen la estimación aprovechando la dependencia entre zonas y entre años.

### 4.3 Modelos espacio temporales

El estudio de tasas de homicidio en microterritorios (barrios, comunas o celdas de grilla) enfrenta dos retos estadísticos bien documentados: la alta variabilidad de las tasas crudas cuando los conteos por área y periodo son pequeños y la presencia de dependencia tanto espacial (entre áreas contiguas) como temporal (entre periodos cercanos). Estos rasgos hacen inadecuado suponer independencia y motivan el uso de modelos que *prestan fuerza* (*borrow strength*) entre unidades vecinas y a lo largo del tiempo, con el objetivo de estabilizar las tasas y mejorar la capacidad de predicción a corto plazo [19, 76].

En este marco, la formulación Bayesiana con campos aleatorios Gaussiano–Markov (GMRF) ha demostrado ser especialmente útil para conteos areales y series temporales cortas, pues permite representar explícitamente la estructura de dependencia y aprovechar algoritmos de inferencia eficientes. La práctica contemporánea recomienda descomponer la variación de las tasas en componentes latentes de *nivel global*, *patrón espacial*, *trayectoria temporal* e *interacción espacio-temporal*, lo que habilita interpretaciones sustantivas claras (tendencias globales, focos locales persistentes, etc.) y una evaluación transparente de la incertidumbre [19].

Para capturar la estructura espacial en datos de área, los modelos autoregresivos condicionales (*CAR*) y sus extensiones constituyen el estándar. En su forma intrínseca, el prior *ICAR* induce suavizamiento por vecindad pero es impropio y su escala depende de la topología, motivo por el cual el *escalamiento* resulta crucial para una interpretación estable de los hiperparámetros [21]. Al añadir un término no estructurado (iid) al componente *ICAR* se obtiene el modelo *Besag–York–Mollié* (*BYM* clásico), útil para separar variabilidad local idiosincrática de la variación espacial suavizada (véase la discusión en [20, 21]). Sobre esta base, la reparametrización *BYM2* combina un *ICAR* escalado con un efecto iid mediante un parámetro de mezcla interpretable, haciendo comparables los hiperparámetros entre distintas mallas [20, 21]. Por su parte, el modelo *Leroux* introduce un parámetro de correlación que transita de independencia a un comportamiento tipo *CAR* manteniendo positividad definida [77]. La elección entre *ICAR/BYM*, *BYM2* y *Leroux* se guía por consideraciones de interpretabilidad, estabilidad numérica y sensibilidad a la estructura de vecindad.

La estructura temporal suele representarse mediante paseos aleatorios (RW) de bajo orden, entendidos como priors intrínsecos para series en tiempo discreto donde se penalizan diferencias sucesivas: en *RW1* las variaciones de un periodo al siguiente tienden a ser pequeñas (suaviza el *nivel*); en *RW2* se penalizan cambios en la pendiente, favoreciendo trayectorias con curvatura moderada (suaviza la *curvatura*). Estos priors, formulados como GMRF intrínsecos con matrices de precisión dispersas, proporcionan regularización temporal interpretable y controlada. Esta parsimonia es apropiada para ventanas mensuales o trimestrales de homicidios y se integra de forma natural al marco GMRF e INLA [19, 21, 76, 43].

La interacción espacio-temporal es clave cuando existen persistencias locales que no pueden explicarse únicamente por efectos principales. La tipología clásica de [43] (Tipos I–IV) clasifica las interacciones según incorporen estructura en tiempo, en espacio, en ambos o en ninguno, y proporciona una base unificada para construir matrices de precisión mediante productos de Kronecker y para imponer restricciones de identificabilidad. Extensiones orientadas a detectar interacción o a distinguirla de efectos de edad/periodo/cohorte han sido ampliamente estudiadas en mapeo de enfermedades [78] y son transferibles al análisis de homicidios en ciudades.

En este sentido, la regularización mediante priors con buena interpretación y propiedades de contracción es esencial para evitar sobre-suavizado y problemas de escala. En particular, el escalamiento de ICAR/BYM2 garantiza que los hiperparámetros mantengan el mismo significado al cambiar la malla, y los *Priors de Complejidad Penalizada* (PC) proporcionan contracción hacia modelos base (varianza cero/independencia) con control probabilístico explícito [20, 21]. Estos principios guiaron la especificación de priors en este trabajo y se detallarán en secciones posteriores.

Es así como los modelos espacio-temporales Bayesianos aplicados en esta tesis, ofrecen un marco coherente para estabilizar las tasas de homicidios en microterritorios, separar tendencias globales de dinámicas locales y generar pronósticos de corto plazo útiles para la planificación de seguridad en Medellín [19, 76, 43].

### 4.3.1 Formulación de datos y verosimilitud

Sea  $y_{it}$  el número de casos observados de homicidio en el microterritorio  $i = 1, \dots, n$  durante el periodo  $t = 1, \dots, T$ , y sea  $N_{it}$  la población residente correspondiente a la misma unidad espacio-temporal. El objetivo es modelar la tasa subyacente  $\lambda_{it}$  de manera que la media del proceso generador sea coherente con la exposición poblacional. En esta tesis se adopta una verosimilitud Poisson con enlace log que incorpora explícitamente el ajuste por población. En particular, se define

$$y_{it} \mid \mu_{it} \sim \text{Poisson}(\mu_{it}), \quad (4.25)$$

$$\mu_{it} = N_{it} \lambda_{it}, \quad (4.26)$$

$$\log \mu_{it} = \log N_{it} + \log \lambda_{it}. \quad (4.27)$$

de modo que el término  $\log N_{it}$  actúa como componente conocida del predictor que ajusta por la exposición, mientras que la dinámica espacio-temporal se recoge en  $\log \lambda_{it}$  [19, 76].

Esta formulación es estándar para datos de área con interés en tasas y resulta adecuada para ejercicios de estimación y pronóstico a corto plazo.

En coherencia con la práctica contemporánea, la tasa se expresa mediante un predictor aditivo, que separa nivel, patrón espacial, evolución temporal e interacción espacio–temporal. En notación, se plantea

$$\log \lambda_{it} = \beta_0 + \xi_i + \gamma_t + \delta_{it}. \quad (4.28)$$

donde  $\beta_0$  representa el nivel global,  $\xi_i$  el efecto espacial,  $\gamma_t$  la trayectoria temporal y  $\delta_{it}$  la interacción espacio–temporal. Estas componentes se formulan como *Gaussian Markov Random Fields* (GMRF) con matrices de precisión dispersas, lo que permite inferencia eficiente y estable en mallas espaciales detalladas [19].

Para el efecto espacial  $\xi_i$  se consideran estructuras ampliamente consolidadas en la literatura de datos de área: la prior intrínseca ICAR (impropia y dependiente de la topología), el modelo BYM clásico (suma de ICAR y un término no estructurado) y su reparametrización BYM2 (que introduce un escalamiento para hacer comparables los hiperparámetros y una mezcla interpretable entre variación estructurada e iid), así como el modelo de Leroux (CAR generalizado con un parámetro de correlación que transita de independencia a dependencia espacial manteniendo positividad definida) [20, 21, 77]. La elección entre estas alternativas se guía por criterios de interpretabilidad, estabilidad numérica y sensibilidad a la estructura de vecindad.

La evolución temporal  $\gamma_t$  se representa mediante un paseo aleatorio de primer orden (RW1), que penaliza diferencias sucesivas y favorece trayectorias suaves en el tiempo. Este prior se formula como GMRF intrínseco y proporciona una regularización temporal interpretable y controlada, adecuada para resoluciones temporales mensuales o trimestrales [19, 21, 76]. La interacción  $\delta_{it}$  sigue la tipología de [43], que distingue entre estructuras sin dependencia, con dependencia temporal, con dependencia espacial o con dependencias en ambas dimensiones; su construcción mediante productos de Kronecker entre precisiones espacial y temporal facilita la imposición de restricciones de identificabilidad y el análisis de persistencias locales no explicadas por los efectos principales [78].

Condicionadas en el campo latente y en los hiperparámetros, las observaciones se asumen independientes; este supuesto continúa siendo operativo aun cuando el número de casos sea elevado, en la medida en que la dependencia espacio–temporal relevante se captura mediante  $\gamma_t$  y  $\delta_{it}$ . Al trabajar con una ventana anual, la agregación reduce fluctuaciones de corto plazo y estabiliza la variabilidad interanual, favoreciendo comparaciones entre microterritorios y periodos consecutivos. Dado el carácter intrínseco de ICAR y de RW1, se aplican restricciones de suma–cero (y, cuando corresponda, restricciones adicionales estándar) para garantizar la identificabilidad del intercepto y de los efectos principales. La regularización de las precisiones y de los parámetros de dependencia/mezcla se plantea mediante *Priors de Complejidad Penalizada* (PC), que contraen hacia modelos base (varianza o correlación nulas) y preservan una interpretación estable bajo cambios en la malla espacial [20, 21].

### 4.3.2 Estructuras espaciales para datos de área

El efecto espacial  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top$  recoge dependencia entre microterritorios contiguos, reduciendo la inestabilidad de las tasas cuando el tamaño poblacional es desigual. Para formalizar la vecindad se emplea la matriz de adyacencia  $\mathbf{W} = (w_{ij})$ , con  $w_{ij} = 1$  si las unidades  $i$  y  $j$  comparten frontera y 0 en caso contrario, y la matriz de grados  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_i)$  con  $d_i = \sum_j w_{ij}$ . El *laplaciano* se define como

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}.$$

**ICAR (Intrinsic CAR).** La versión intrínseca especifica una cuasi-densidad gaussiana con matriz de precisión proporcional a  $\mathbf{L}$ :

$$\boldsymbol{\xi} | \tau_\xi \propto \exp\left(-\frac{\tau_\xi}{2} \boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{L} \boldsymbol{\xi}\right),$$

donde  $\tau_\xi > 0$  funciona como hiperparámetro de precisión (inverso de varianza). Dado que  $\mathbf{L}$  es singular, el prior es impropio y requiere restricciones de identificabilidad (p. ej., suma-cero:  $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{\xi} = 0$ ). Para estabilizar la interpretación de  $\tau_\xi$  ante cambios de malla, se recomienda un *escalamiento* de  $\mathbf{L}$  que produzca una versión  $\mathbf{L}^*$  con varianza marginal promedio unitaria; con este ajuste, la precisión efectiva es

$$\mathbf{R}_{\text{ICAR}}(\tau_\xi) = \tau_\xi \mathbf{L}^*,$$

lo que hace comparable el significado de  $\tau_\xi$  entre distintas particiones espaciales [21].

**BYM clásico (Besag–York–Mollie).** El modelo clásico descompone  $\boldsymbol{\xi}$  en una parte estructurada  $\mathbf{u}$  y otra no estructurada  $\mathbf{v}$ ,

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} + \mathbf{v},$$

$$\mathbf{u} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \tau_u^{-1} \mathbf{L}^{*-}\right), \quad \mathbf{v} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \tau_v^{-1} \mathbf{I}_n\right),$$

con independencia entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . La *matriz de precisión conjunta* del vector ampliado  $(\mathbf{u}^\top, \mathbf{v}^\top)^\top$  es *block-diagonal*:

$$\mathbf{R}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \tau_u \mathbf{L}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tau_v \mathbf{I}_n \end{pmatrix}.$$

La covarianza de  $\boldsymbol{\xi}$  resulta de la suma de covarianzas,

$$\boldsymbol{\Sigma}_\boldsymbol{\xi} = \tau_u^{-1} \mathbf{L}^{*-} + \tau_v^{-1} \mathbf{I}_n,$$

y su precisión es  $\mathbf{R}_\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Sigma}_\boldsymbol{\xi}^{-1}$  (en el sentido generalizado). Nótese que  $\mathbf{R}_\boldsymbol{\xi}$  no hereda la misma esparsidad de  $\mathbf{L}^*$  debido a la suma con  $\mathbf{I}_n$ , lo que motiva reparametrizaciones con mejor comportamiento numérico [discusión en 20, 21].

**BYM2 (reparametrización escalada).** La reparametrización BYM2 fija una *varianza marginal unitaria* para los componentes básicos y concentra la complejidad en un escalar de varianza total y un parámetro de mezcla. En particular,

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{\sqrt{\tau_\xi}} \left( \sqrt{\phi} \mathbf{u}^* + \sqrt{1-\phi} \mathbf{v} \right),$$

$$\mathbf{u}^* \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_{\text{ICAR}}^*), \quad \mathbf{v} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n), \quad \phi \in [0, 1],$$

donde  $\mathbf{R}_{\text{ICAR}}^* = \mathbf{L}^*$  es el ICAR escalado. En esta parametrización, la *matriz de precisión de  $\boldsymbol{\xi}$*  es *explícita y esparsa*:

$$\mathbf{R}_{\text{BYM2}}(\tau_\xi, \phi) = \tau_\xi \left( \phi \mathbf{L}^* + (1-\phi) \mathbf{I}_n \right).$$

Así,  $\tau_\xi$  controla la *varianza total* del efecto espacial y  $\phi$  cuantifica la *proporción de variabilidad estructurada*; al usar  $\mathbf{L}^*$  escalado, ambos hiperparámetros conservan una interpretación estable entre mallas [21, 20].

**Leroux (CAR generalizado).** El modelo de [77] introduce un parámetro de dependencia  $\rho \in [0, 1)$  que transita entre independencia y correlación espacial. Una forma habitual, positiva definida para  $\rho \in [0, 1)$ , es

$$\mathbf{R}_{\text{Leroux}}(\tau_\xi, \rho) = \tau_\xi (\mathbf{D} - \rho \mathbf{W}),$$

de modo que  $\rho = 0$  aproxima independencia espacial ( $\mathbf{R} = \tau_\xi \mathbf{D}$ ) y valores cercanos a 1 inducen un patrón tipo CAR. Alternativamente, cuando se busca comparabilidad de escala con ICAR escalado, puede emplearse

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\text{Leroux}}(\tau_\xi, \rho) = \tau_\xi \left( (1-\rho) \mathbf{I}_n + \rho \mathbf{L}^* \right),$$

lo que hace explícita la continuidad entre independencia ( $\rho = 0$ ) y un ICAR escalado ( $\rho \rightarrow 1$ ), con interpretación de  $\tau_\xi$  análoga a BYM2.

Las expresiones anteriores clarifican el papel de  $\tau_\xi$  como *factor de escala* que multiplica la estructura espacial base:  $\mathbf{L}^*$  en ICAR escalado y BYM2, y  $\mathbf{D} - \rho \mathbf{W}$  (o  $(1-\rho) \mathbf{I}_n + \rho \mathbf{L}^*$ ) en Leroux. En BYM clásico, la precisión se maneja en el espacio ampliado  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  con dos hiperparámetros  $(\tau_u, \tau_v)$ , mientras que BYM2 concentra la varianza total en  $\tau_\xi$  y la partición estructurada/no estructurada en  $\phi$ , lo que simplifica la especificación de *priors* y la comparación entre mallas. En todos los casos se impondrán restricciones de suma-cero para asegurar identificabilidad del intercepto, y se utilizarán *Priors de Complejidad Penalizada* para  $\tau_\xi$  y, según el modelo, para  $\phi$  o  $\rho$ , con calibraciones probabilísticas sobre umbrales interpretables [21, 20, 77].

### 4.3.3 Estructuras temporales

El efecto temporal  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_T)^\top$  se modela como un *random walk* de orden  $k$  (RW $k$ ), que penaliza diferencias sucesivas de orden  $k$  y favorece trayectorias suaves en el tiempo. Sea  $\mathbf{D}_k$

la matriz de diferencias hacia adelante de orden  $k$ , de dimensión  $(T - k) \times T$ , cuyos renglones implementan

$$(\mathbf{D}_k \boldsymbol{\gamma})_t = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \gamma_{t+k-j} \quad \text{para } t = 1, \dots, T - k.$$

La formulación GMRF intrínseca se escribe como una cuasi-densidad gaussiana

$$\boldsymbol{\gamma} | \tau_\gamma \propto \exp\left(-\frac{\tau_\gamma}{2} \|\mathbf{D}_k \boldsymbol{\gamma}\|_2^2\right),$$

equivalentemente, como una Normal Multivariada con media cero y matriz de precisión

$$\boldsymbol{\gamma} | \tau_\gamma \sim \mathcal{N}_T\left(\mathbf{0}, \left(\mathbf{R}_{\text{RW}k}(\tau_\gamma)\right)^{-1}\right),$$

$$\mathbf{R}_{\text{RW}k}(\tau_\gamma) = \tau_\gamma \mathbf{D}_k^\top \mathbf{D}_k,$$

donde  $\tau_\gamma > 0$  controla el grado de suavizado temporal (valores grandes penalizan con mayor fuerza las diferencias de orden  $k$ ). Para  $k \geq 1$ ,  $\mathbf{R}_{\text{RW}k}$  es singular de rango  $T - k$ ; en consecuencia, la distribución es *intrínseca* y se interpreta como Normal Multivariante con inversa generalizada o, de forma equivalente, condicionada a  $k$  restricciones lineales que garantizan identificabilidad. Una elección habitual de restricciones es

$$\mathbf{C} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0},$$

donde  $\mathbf{C}$  reúne  $k$  condiciones ortogonales a polinomios de grado hasta  $k - 1$  (por ejemplo, para RW1 una suma-cero,  $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{\gamma} = 0$ ). Con estas restricciones se separa el intercepto del efecto temporal y se asegura una descomposición identificable del predictor. La forma dispersa y tridiagonal-bandada de  $\mathbf{R}_{\text{RW}k}$  permite cómputo eficiente en el marco INLA y mantiene estabilidad numérica cuando  $T$  crece moderadamente [19, 21].

La regularización a priori de  $\tau_\gamma$  se plantea mediante *Priors de Complejidad Penalizada* (PC), que contraen hacia el modelo base sin variación temporal (varianza cero) y admiten calibraciones con probabilidades sobre umbrales interpretables para la desviación estándar del efecto temporal. Esta especificación es coherente con el tratamiento de los efectos espaciales y con la literatura reciente en datos de área con series temporales [21, 43].

### 4.3.4 Interacciones espacio-temporales (tipología de Knorr-Held) e identificabilidad

Sea  $\boldsymbol{\delta} = \{\delta_{it}\}_{i=1, \dots, n; t=1, \dots, T}$  el efecto de interacción espacio-temporal, vectorizado en un arreglo de dimensión  $nT \times 1$ . Se modela como Normal Multivariada de media cero con matriz de precisión construida mediante productos de Kronecker entre las matrices de estructura temporal y espacial:

$$\boldsymbol{\delta} | \tau_\delta \sim \mathcal{N}_{nT}\left(\mathbf{0}, \left(\tau_\delta \mathbf{R}_\delta\right)^{-1}\right),$$

$$\mathbf{R}_\delta \in \left\{ \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{R}_\gamma \otimes \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{R}_\xi, \quad \mathbf{R}_\gamma \otimes \mathbf{R}_\xi \right\},$$

donde  $\mathbf{R}_\gamma$  representa la estructura temporal (p. ej., RW1) y  $\mathbf{R}_\xi$  la estructura espacial (p. ej., ICAR escalado/BYM2/Leroux) [43]. La tipología I–IV de [43] y las restricciones de suma–cero requeridas para garantizar identificabilidad se sintetizan en la Tabla 4.1. Cuando las componentes estructuradas son intrínsecas (RW1, ICAR),  $\mathbf{R}_\gamma$  y/o  $\mathbf{R}_\xi$  son singulares y el producto de Kronecker hereda dichos núcleos; por ello se aplican restricciones canónicas que separan el intercepto y evitan que la interacción reabsorba variación ya explicada por los efectos principales [79]. Esta formulación coincide con la empleada en [19] y [41].

**Tabla 4.1.** Especificación de los tipos de interacción espacio–temporal (Knorr–Held, 2000) y restricciones de suma–cero (Goicoa et al., 2018).

Tipo	$\mathbf{R}_\delta$	Restricciones de suma–cero
I	$\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{I}_n$	$\sum_{i=1}^n \xi_i = 0$ , $\sum_{t=1}^T \gamma_t = 0$ , $\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \delta_{it} = 0$
II	$\mathbf{R}_\gamma \otimes \mathbf{I}_n$	$\sum_{i=1}^n \xi_i = 0$ , $\sum_{t=1}^T \gamma_t = 0$ , $\sum_{t=1}^T \delta_{it} = 0$ para $i = 1, \dots, n$
III	$\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{R}_\xi$	$\sum_{i=1}^n \xi_i = 0$ , $\sum_{t=1}^T \gamma_t = 0$ , $\sum_{i=1}^n \delta_{it} = 0$ para $t = 1, \dots, T$
IV	$\mathbf{R}_\gamma \otimes \mathbf{R}_\xi$	$\sum_{i=1}^n \xi_i = 0$ , $\sum_{t=1}^T \gamma_t = 0$ , $\sum_{t=1}^T \delta_{it} = 0$ para $i = 1, \dots, n$ , $\sum_{i=1}^n \delta_{it} = 0$ para $t = 1, \dots, T$

Las restricciones de la Tabla 4.1 aseguran identificabilidad del intercepto (centrando  $\xi_i$  y  $\gamma_t$ ) y desacople de la interacción  $\delta_{it}$  respecto de los promedios espacial y temporal. El uso de matrices de estructura escaladas (p. ej., ICAR escalado para  $\mathbf{R}_\xi$  y versiones escaladas para  $\mathbf{R}_\gamma$ ) preserva una interpretación estable de los hiperparámetros ante cambios de malla o de la resolución temporal [19, 21]. En la implementación, la forma Kronecker de  $\mathbf{R}_\delta$  mantiene la esparsidad y habilita rutinas numéricas eficientes; además, se especifican *Priors de Complejidad Penalizada* para  $\tau_\delta$ , con contracción hacia la ausencia de interacción cuando la evidencia empírica así lo indique [21].

### 4.3.5 Integrated Nested Laplace Approximation (INLA) en modelos jerárquicos espacio–temporales bayesianos

La inferencia Bayesiana exacta en modelos jerárquicos complejos, como los espacio–temporales, suele ser inabordable debido a la dificultad de calcular integrales de alta dimensión para obtener distribuciones marginales a posteriori. Tradicionalmente, la solución ha sido recurrir a técnicas de simulación como Markov Chain Monte Carlo (MCMC) que, si bien son asintóticamente exactas, pueden resultar muy costosas computacionalmente en dominios amplios. En este contexto, *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA), propuesta por [15], constituye una alternativa determinista, precisa y eficiente para inferencia Bayesiana dentro de los *Modelos Gaussianos Latentes* (LGM).

#### Aproximación de Laplace

La base del método INLA se encuentra en la aproximación de Laplace para integrales de la forma

$$I = \int f(x) dx = \int \exp\{\log f(x)\} dx, \quad (4.29)$$

donde  $\log f(x)$  se aproxima mediante un desarrollo de Taylor de segundo orden alrededor del modo  $x^* = \arg \max_x \log f(x)$ . Con ello, se obtiene

$$\log f(x) \approx \log f(x^*) - \frac{1}{2} (x - x^*)^2 \left[ -\frac{\partial^2 \log f(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=x^*} \right], \quad (4.30)$$

lo que conduce a una aproximación Gaussiana para  $f(x)$  centrada en  $x^*$  y con varianza inversa al valor de la segunda derivada en dicho punto. Esta idea fundamental se extiende a múltiples dimensiones y constituye la base del método INLA [80].

## Modelos Gaussianos Latentes

INLA se aplica a una amplia clase de modelos con estructura latente Gaussiana. El esquema adoptado se organiza en tres niveles [15, 16]:

1. **Nivel de datos:** las observaciones  $\mathbf{y} = \{y_{it}\}_{i=1,\dots,n;t=1,\dots,T}$  son condicionalmente independientes dados el campo latente  $\boldsymbol{\theta}$  y los hiperparámetros  $\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \prod_{i=1}^n \prod_{t=1}^T p(y_{it} \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon}), \quad y_{it} \mid \mu_{it} \sim \text{Poisson}(\mu_{it}), \quad (4.31)$$

con media

$$\mu_{it} = N_{it} \lambda_{it}, \quad \log \lambda_{it} = \beta_0 + \xi_i + \gamma_t + \delta_{it}. \quad (4.32)$$

2. **Nivel latente:** el vector latente agrega intercepto y efectos estructurales,

$$\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \boldsymbol{\xi}^\top, \boldsymbol{\gamma}^\top, \boldsymbol{\delta}^\top)^\top, \quad (4.33)$$

y sigue una Normal Multivariante de media cero con matriz de precisión dispersa

$$p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\varepsilon}) \propto |\mathbf{R}(\boldsymbol{\varepsilon})|^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{R}(\boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{\theta}\right). \quad (4.34)$$

La matriz  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\varepsilon})$  se expresa de forma *block-diagonal* para reflejar la descomposición del campo latente:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \text{diag}\left(\tau_0, \mathbf{R}_\xi(\tau_\xi, \phi \circ \rho), \mathbf{R}_\gamma(\tau_\gamma), \mathbf{R}_\delta(\tau_\delta)\right), \quad (4.35)$$

donde  $\mathbf{R}_\xi$  representa la precisión del efecto espacial (por ejemplo, ICAR escalado, BYM2 o Leroux),  $\mathbf{R}_\gamma = \tau_\gamma \mathbf{D}_k^\top \mathbf{D}_k$  corresponde a un random walk de orden  $k$ , y  $\mathbf{R}_\delta$  describe la interacción espacio-temporal mediante productos de Kronecker.

3. **Nivel de hiperparámetros:** los hiperparámetros  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\tau_0, \tau_\xi, \tau_\gamma, \tau_\delta, \phi \circ \rho)$  reciben distribuciones previas, con preferencia por *PC-priors* calibradas:

$$p(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (4.36)$$

La posterior conjunta adopta la forma

$$p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon} \mid \mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon}) p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\varepsilon}) p(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (4.37)$$

## Inferencia con INLA

El interés práctico recae en las marginales univariadas a posteriori de componentes latentes e hiperparámetros:

$$p(\theta_j | \mathbf{y}) = \int p(\theta_j | \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{y}) p(\boldsymbol{\varepsilon} | \mathbf{y}) d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.38)$$

$$p(\varepsilon_r | \mathbf{y}) = \int p(\boldsymbol{\varepsilon} | \mathbf{y}) d\boldsymbol{\varepsilon}_{-r}. \quad (4.39)$$

Para abordar estas integrales, INLA utiliza un procedimiento en tres etapas basado en aproximaciones de Laplace [15]:

1. Aproximación de  $p(\boldsymbol{\varepsilon} | \mathbf{y})$  (alrededor del modo) mediante Laplace:

$$\tilde{p}(\boldsymbol{\varepsilon} | \mathbf{y}) \propto \frac{p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon}) p(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\varepsilon}) p(\boldsymbol{\varepsilon})}{\tilde{p}(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{y})} \Bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^*(\boldsymbol{\varepsilon})}. \quad (4.40)$$

2. Aproximación de  $p(\theta_j | \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{y})$  (Gaussiana, Laplace completa o Laplace simplificada).
3. Integración numérica adaptativa sobre  $\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$\tilde{p}(\theta_j | \mathbf{y}) \approx \sum_k \tilde{p}(\theta_j | \boldsymbol{\varepsilon}_k, \mathbf{y}) \tilde{p}(\boldsymbol{\varepsilon}_k | \mathbf{y}) \Delta_k. \quad (4.41)$$

donde  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_k, \Delta_k\}$  son puntos y pesos obtenidos en una cuadratura numérica adaptativa.

## INLA: ventajas computacionales y relevancia en aplicaciones

El método *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA) se ha consolidado como una de las herramientas más relevantes para la inferencia Bayesiana en modelos jerárquicos complejos y, en particular, en los Modelos Gaussianos Latentes (LGM). Su principal fortaleza radica en la representación del campo latente  $\boldsymbol{\theta}$  como un *Gaussian Markov Random Field* (GMRF), lo que implica que la matriz de precisión  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\varepsilon})$  es dispersa y permite utilizar rutinas numéricas optimizadas para álgebra lineal de matrices esparsas. Esta característica reduce significativamente los costos computacionales frente a métodos de simulación como MCMC, sin sacrificar la precisión de las distribuciones marginales aproximadas a posteriori. Gracias a ello, INLA puede abordar problemas con miles de componentes latentes de manera eficiente, ofreciendo resultados precisos en tiempos computacionales razonables incluso en aplicaciones de gran escala. Su impacto se ha visto reflejado en campos como la epidemiología, la criminología y la demografía, donde los datos se estructuran en dominios espaciales y temporales y donde la rapidez en la obtención de inferencias es crucial para la toma de decisiones en tiempo real. Además, la metodología se encuentra implementada en el paquete R-INLA (<http://www.r-inla.org/>), lo que facilita su uso en la práctica aplicada y ha contribuido a su amplia adopción en la comunidad científica [15, 16].

## SPDE: representación continua de la dependencia espacial

La aproximación *Stochastic Partial Differential Equation* (SPDE) [38] vincula covarianzas Matérn con precisiones dispersas resolviendo

$$(\kappa^2 - \Delta)^{\alpha/2} x(s) = \mathcal{W}(s),$$

donde  $\Delta$  es el operador de Laplace,  $\mathcal{W}(s)$  un ruido blanco Gaussiano,  $\kappa$  controla la escala espacial y  $\alpha$  la suavidad del campo. La discretización por elementos finitos sobre una malla triangulada produce un GMRF con matriz de precisión esparsa, preservando la interpretación de parámetros de rango y varianza y facilitando su integración con componentes temporales e interacciones espacio-temporales en el marco INLA [38].

### 4.3.6 Predicción espacio-temporal con INLA

En el marco del modelo Poisson espacio-temporal descrito en la Sección 4.3.1, la predicción se formula de manera coherente con la estructura jerárquica bayesiana y el campo latente Gaussiano. Sea  $\mathbf{y} = \{y_{it}\}_{i=1,\dots,n; t=1,\dots,T}$  el conjunto de observaciones, y sea  $\mathbf{y}_{-it}$  el conjunto que excluye la componente correspondiente al microterritorio  $i$  en el periodo  $t$ . Para un conteo a predecir  $y_{it}^*$ , que puede corresponder a un valor omitido (esquemas *leave-one-out*) o a un valor futuro, se mantiene la misma estructura del modelo:

$$y_{it}^* | \mu_{it}^* \sim \text{Poisson}(\mu_{it}^*), \quad \mu_{it}^* = N_{it}^* \lambda_{it}^*, \quad \log \lambda_{it}^* = \beta_0 + \xi_i + \gamma_t + \delta_{it}, \quad (4.42)$$

donde  $N_{it}^*$  es la población en riesgo conocida o proyectada en  $(i, t)$ . En el caso *leave-one-out*, se tiene  $N_{it}^* = N_{it}$  y  $(i, t)$  pertenece al dominio observado; en el caso de predicción genuina a futuro,  $(i, t)$  representa un nuevo periodo (por ejemplo  $t = t^* > T$ ) y los términos  $\gamma_t$  y  $\delta_{it}$  se entienden evaluados en dicho índice.

El campo latente se escribe como

$$\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \boldsymbol{\xi}^\top, \boldsymbol{\gamma}^\top, \boldsymbol{\delta}^\top)^\top,$$

con distribución Gaussiana Markoviana y matrices de precisión  $\mathbf{R}_\xi(\tau_\xi, \phi \circ \rho)$ ,  $\mathbf{R}_\gamma(\tau_\gamma)$  y  $\mathbf{R}_\delta(\tau_\delta)$ . Siguiendo la formulación general de [15, 19, 81], la distribución predictiva a posteriori de  $y_{it}^*$  condicionada en la información restante se expresa como

$$p(y_{it}^* | \mathbf{y}_{-it}) = \iint p(y_{it}^* | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon}) p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon} | \mathbf{y}_{-it}) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.43)$$

donde  $p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon} | \mathbf{y}_{-it})$  es la distribución conjunta a posteriori del campo latente y los hiperparámetros al excluir la observación objetivo. Para predicción futura, el índice correspondiente no pertenece a  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{y}_{-it}$  coincide con el conjunto completo de datos observados.

Como  $\lambda_{it}^*$  es función determinista de  $(\beta_0, \xi_i, \gamma_t, \delta_{it})$ , la expresión (4.43) puede reescribirse como

$$p(y_{it}^* | \mathbf{y}_{-it}) = \iint \text{Poisson}(y_{it}^* | N_{it}^* \lambda_{it}^*(\boldsymbol{\theta})) p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon} | \mathbf{y}_{-it}) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.44)$$

lo que define la distribución predictiva completa para el conteo en  $(i, t)$  condicionada en la información disponible.

En la implementación con INLA, esta distribución se obtiene tratando  $y_{it}^*$  como una *observación faltante* y proporcionando el correspondiente  $N_{it}^*$ . El algoritmo entrega directamente las marginales a posteriori de  $\log \lambda_{it}^*$  y  $\lambda_{it}^*$ , a partir de las cuales se construyen resúmenes

predictivos. En particular, el valor esperado a posteriori del conteo se deriva de la ley de la esperanza iterada:

$$\mathbb{E}[y_{it}^* | \mathbf{y}_{-it}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(y_{it}^* | \lambda_{it}^*) | \mathbf{y}_{-it}] = \mathbb{E}[N_{it}^* \lambda_{it}^* | \mathbf{y}_{-it}] \approx N_{it}^* \mathbb{E}[\lambda_{it}^* | \mathbf{y}_{-it}], \quad (4.45)$$

donde  $\mathbb{E}[\lambda_{it}^* | \mathbf{y}_{-it}]$  se obtiene de las marginales aproximadas suministradas por INLA.

Para caracterizar la distribución completa de  $y_{it}^*$  puede emplearse un esquema de simulación basado en estas marginales:

1. Simular  $S$  valores  $\lambda_{it}^{*(s)}$  a partir de la distribución a posteriori aproximada de  $\lambda_{it}^* | \mathbf{y}_{-it}$ .
2. Para cada  $s = 1, \dots, S$ , generar

$$y_{it}^{*(s)} \sim \text{Poisson}(N_{it}^* \lambda_{it}^{*(s)}). \quad (4.46)$$

Los cuantiles empíricos de  $\{y_{it}^{*(s)}\}_{s=1}^S$  proporcionan intervalos creíbles predictivos, y los promedios o puntajes de verosimilitud logarítmica permiten evaluar el desempeño del modelo en esquemas de validación cruzada temporal o de tipo *leave-one-out*, en línea con [19].

Este enfoque preserva la consistencia entre el modelo de tasas, la incorporación explícita de la exposición poblacional y la estructura espacio–temporal latente, y permite cuantificar de forma rigurosa la incertidumbre asociada a los pronósticos en cada microterritorio y periodo.

### 4.3.7 Criterios de evaluación y selección de modelos

La comparación entre modelos espacio–temporales requiere criterios que integren ajuste, complejidad y capacidad predictiva, distinguiendo claramente entre medidas basadas en el ajuste dentro de la muestra (*in-sample*) y medidas orientadas a la validación fuera de la muestra (*out-of-sample*). En este trabajo se emplean: (i) criterios *in-sample* penalizados por complejidad, como el Watanabe–Akaike Information Criterion (WAIC), el Deviance Information Criterion (DIC) y el Log Pseudo Marginal Likelihood (LPML) derivado de los Conditional Predictive Ordinates (CPO); y (ii) esquemas de validación cruzada temporal con ventanas deslizantes, que proporcionan medidas *out-of-sample* directamente asociadas al desempeño predictivo. Todos estos elementos son coherentes con el marco Bayesiano e implementables mediante R-INLA [82, 83].

1. **Watanabe–Akaike Information Criterion (WAIC).** El WAIC aproxima el comportamiento de una validación cruzada dejando-uno-fuera utilizando únicamente cantidades a posteriori. Sea  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , con contribuciones de verosimilitud  $p(y_i | \boldsymbol{\theta})$ . Se define

$$\text{lppd} = \sum_{i=1}^n \log \left( \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}|y} [p(y_i | \boldsymbol{\theta})] \right), \quad p_{\text{WAIC}} = \sum_{i=1}^n \text{Var}_{\boldsymbol{\theta}|y} \left( \log p(y_i | \boldsymbol{\theta}) \right),$$

$$\text{WAIC} = -2 (\text{lppd} - p_{\text{WAIC}}).$$

Se trata de un criterio *in-sample* con corrección por complejidad efectiva, donde valores menores indican mejor capacidad predictiva penalizada. Al construirse punto a punto sobre la distribución a posteriori, suele ser estable en modelos jerárquicos con campos latentes.

2. **Deviance Information Criterion (DIC).** El DIC se basa en la devianza  $D(\boldsymbol{\theta}) = -2 \log p(y \mid \boldsymbol{\theta})$  (hasta constante aditiva):

$$\bar{D} = \mathbb{E}_{\theta|y}[D(\boldsymbol{\theta})], \quad p_D = \bar{D} - D(\bar{\boldsymbol{\theta}}), \quad \text{DIC} = \bar{D} + p_D.$$

También es un criterio *in-sample* con penalización por complejidad. En modelos con priors intrínsecos (por ejemplo, ICAR o paseos aleatorios) o con campos latentes de alta dimensión, la estimación de  $p_D$  puede resultar inestable, por lo que se utiliza como medida complementaria y se interpreta siempre junto con otros criterios.

3. **Conditional Predictive Ordinates (CPO) y Log Pseudo Marginal Likelihood (LPML).** Los CPO se definen como

$$\text{CPO}_i = p(y_i \mid y_{-i}),$$

y el LPML como

$$\text{LPML} = \sum_{i=1}^n \log(\text{CPO}_i).$$

Valores más altos de LPML reflejan mejor capacidad predictiva de tipo dejando-uno-fuera. Aunque su cálculo parte de la distribución a posteriori ajustada con todos los datos, su interpretación es esencialmente *predictiva*, al cuantificar qué tan bien explica cada observación el modelo condicionado en las restantes. En la práctica, los CPO se obtienen mediante aproximaciones específicas disponibles en INLA. El LPML se considera aquí como un criterio *in-sample* con lectura predictiva, que complementa la información suministrada por WAIC.

4. **Validación cruzada temporal con ventanas deslizantes (LGOCV).** Para evaluar de forma explícita el desempeño *out-of-sample* en pronóstico de corto plazo se implementa un esquema de validación cruzada temporal con ventanas deslizantes (*Leave-Group-Out Cross-Validation*). Se selecciona una ventana histórica  $\mathcal{T}_{\text{train}}$  para estimar el modelo y se evalúa la capacidad predictiva en la ventana inmediata siguiente  $\mathcal{T}_{\text{test}}$ , repitiendo el procedimiento al desplazar ambas ventanas en el tiempo. Sobre los conjuntos de prueba se calculan log-verosimilitudes predictivas agregadas, LPML y puntuaciones propias (como el log-score). Esta estrategia constituye la evidencia central para comparar especificaciones de los efectos espaciales (ICAR, BYM2), de las interacciones espacio-temporales (tipos I–IV) y, especialmente, de las distintas regionalizaciones consideradas.
5. **Comparación entre particiones espaciales.** En la comparación de diferentes particiones o regionalizaciones espaciales, los criterios *in-sample* (WAIC, DIC y LPML basados en CPO) se calculan con la unidad observacional correspondiente a la verosimilitud de cada modelo. Para obtener comparaciones robustas entre soportes espaciales alternativos, los ejercicios de validación cruzada temporal utilizan un mismo horizonte de prueba y, cuando es pertinente, las predicciones se proyectan a un soporte espacial común antes de calcular las puntuaciones predictivas, evitando favorecer o penalizar modelos únicamente por el número o tamaño de las unidades espaciales.

En esta tesis se reportan, para cada especificación espacio-temporal y para cada partición espacial analizada: (i) los valores de WAIC, DIC y LPML obtenidos dentro de la muestra; y (ii) los valores de LPML y de log-scores derivados de esquemas LGOCV con ventanas deslizantes.



# Capítulo 5

## Metodología

La metodología adoptada en esta investigación se fundamentó en los principios del estándar *Cross Industry Standard Process for Data Mining* (*CRISP-DM*), ampliamente reconocido en la comunidad de ciencia de datos por su carácter iterativo, flexible y orientado a la reproducibilidad. Este marco metodológico organiza el proceso analítico en seis fases interrelacionadas—comprensión del negocio, comprensión de los datos, preparación de los datos, modelado, evaluación y despliegue— que se desarrollan de manera cíclica hasta alcanzar un equilibrio entre interpretabilidad, precisión predictiva y validez estadística [84].

En el contexto de esta tesis, el estándar *CRISP-DM* se adaptó a un problema de naturaleza espacio-temporal y jerárquica: la modelación de la incidencia de homicidios en Medellín. Este enfoque combinó procedimientos estadísticos avanzados con herramientas computacionales reproducibles desarrolladas en R [85], en especial mediante la librería R-INLA [15, 37], e implementadas en entornos de cómputo de alto desempeño (HPC). Todo el proceso se ejecutó bajo un esquema de control de versiones y trazabilidad mediante Git/GitHub, lo que garantizó transparencia, replicabilidad y consistencia en la gestión de datos y modelos.

El diseño metodológico abarcó desde la integración y depuración de fuentes institucionales heterogéneas —provenientes del Sistema de Información para la Seguridad y la Convivencia (SISC), Datos Abiertos Colombia, DANE y GeoMedellín— hasta la construcción de unidades espaciales homogéneas mediante grillas hexagonales a múltiples escalas (entre 500 y 2500 metros). Estas unidades se contrastaron con regionalizaciones temáticas basadas en indicadores socio-delictivos, lo que permitió comparar distintas representaciones espaciales del fenómeno. Posteriormente, se formularon modelos jerárquicos espacio-temporales bajo el marco bayesiano utilizando la aproximación *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA), optimizada para estructuras de datos con dependencias espaciales y temporales (modelos BYM, BYM2, ICAR). Finalmente, se evaluó el desempeño predictivo mediante validación cruzada espacio-temporal y métricas de calidad tales como DIC, WAIC, LGOCV y RMSE, con el fin de comparar de manera sistemática las configuraciones consideradas bajo criterios de ajuste, parsimonia y estabilidad.

El enfoque metodológico se concibió como un sistema iterativo en el que la comprensión conceptual del fenómeno guió la estructuración de los datos, la formulación de modelos y la

evaluación de resultados, retroalimentando continuamente las fases anteriores. Cada etapa mantuvo coherencia con el objetivo central de la investigación: comprender y modelar la dinámica espacio-temporal del homicidio en Medellín bajo un marco bayesiano jerárquico que permitiera generar evidencia empírica sólida para la toma de decisiones en política pública de seguridad ciudadana.

## 5.1 Entendimiento del negocio

El punto de partida de esta investigación fue la comprensión del homicidio en Medellín como un fenómeno espacio-temporal complejo, influido por factores estructurales y contingentes que reflejaron las transformaciones sociales, económicas y territoriales de la ciudad. En América Latina, y particularmente en Colombia, la violencia homicida se ha consolidado como uno de los principales desafíos de la política pública y un campo donde la analítica espacial ha ofrecido evidencia útil para orientar estrategias de prevención y control [1].

El propósito central de esta fase fue establecer las bases conceptuales y técnicas que orientaron el análisis posterior, delimitando el fenómeno de estudio, las escalas de observación y las unidades espaciales más adecuadas para su representación. El marco analítico se estructuró en torno a cinco principios fundamentales:

1. **No aleatoriedad espacial del crimen:** La evidencia empírica demostró que los homicidios tendieron a concentrarse en unidades geográficas específicas y presentaron persistencia temporal [6, 8]. Esta regularidad espacial justificó el uso de unidades homogéneas de análisis, representadas mediante grillas hexagonales, que permitieron reducir los sesgos derivados de los límites administrativos tradicionales y asegurar comparabilidad entre escalas.
2. **Integración de fuentes y protección de datos:** Los registros de homicidios se consolidaron a partir de los datos abiertos del Gobierno de Colombia (2003–2014) y de la información suministrada por el Sistema de Información para la Seguridad y la Convivencia (SISC) para el período 2015–2024, obtenida mediante un derecho de petición. Para salvaguardar la confidencialidad de las víctimas, el SISC aplicó un desplazamiento aleatorio de coordenadas de aproximadamente  $\pm 50$  metros, aspecto incorporado en el análisis como fuente explícita de incertidumbre espacial.
3. **Regionalización temática:** Además de la discretización hexagonal, se construyeron unidades espaciales agregadas mediante una regionalización temática contigua que agrupó celdas vecinas con perfiles socio-delictivos similares. La agrupación se fundamentó en tres indicadores: tasa de homicidios, proporción de estudiantes desplazados y frecuencia de lesiones personales, derivados de fuentes del DANE y GeoMedellín. Este procedimiento buscó capturar la heterogeneidad socio-territorial de la violencia y representar de manera más estable los patrones del riesgo urbano.
4. **Modelación jerárquica espacio-temporal:** La variabilidad de los homicidios se representó mediante modelos jerárquicos bayesianos con estructuras de dependencia espacial que permitieron capturar la correlación entre unidades vecinas y suavizar las tasas observadas. Este enfoque ofreció un marco estadístico coherente para analizar patrones

de concentración y evolución temporal, preservando la estabilidad y la interpretabilidad de los resultados [37].

5. **Rigor metodológico y reproducibilidad:** El desarrollo de esta fase se fundamentó en procedimientos verificables y documentados que garantizaron la coherencia entre las distintas etapas de la investigación, desde la depuración de las fuentes hasta la validación final de los modelos. La trazabilidad metodológica constituyó un elemento central para asegurar transparencia y replicabilidad.

## 5.2 Comprensión de los datos

Esta fase funcionó como puente entre el marco conceptual del Capítulo 4 y la implementación empírica, asegurando que la estructura observacional —qué se mide, dónde y cuándo— fuera coherente con los supuestos de dependencia espacial y temporal requeridos por la modelación jerárquica. En particular, se buscó que las decisiones de representación territorial respondieran a los desafíos del *Modifiable Areal Unit Problem* (MAUP) y a su mitigación mediante regionalización contigua [13, 14, 18].

El proceso inició con la integración de registros georreferenciados de homicidios provenientes de fuentes oficiales consolidadas, cubriendo el periodo 2003–2024. Se armonizaron definiciones, estructuras y codificaciones con el fin de garantizar la comparabilidad interanual, verificando su consistencia mediante contrastes cruzados entre fuentes y chequeos de continuidad de series temporales. Las discrepancias sistemáticas detectadas no se corrigieron de forma directa, sino que se documentaron como insumo metodológico para las etapas de evaluación y despliegue, manteniendo la trazabilidad completa del flujo de información.

En el plano espacial, se verificó la coherencia geométrica de los registros mediante validaciones topológicas y filtros de pertenencia al perímetro urbano oficial. La incertidumbre posicional derivada de los protocolos de confidencialidad ya descritos en la Sección 5.1 —específicamente la aleatorización controlada de coordenadas— no se volvió a detallar en esta fase, pero se trató como una fuente inherente de error de medición espacial. Su efecto se mitigó priorizando el uso de unidades areales y agregaciones territorialmente consistentes, en concordancia con las recomendaciones metodológicas de la literatura sobre MAUP [13, 14].

A fin de enriquecer la caracterización espacial y dotar de coherencia temática a las unidades de análisis, se integraron tres insumos georreferenciados con propósito no explicativo sino geométrico–estadístico: (i) la *proporción de estudiantes* que reportan desplazamiento forzado, obtenida por superposición de colegios georreferenciados con las unidades areales y cálculo de la razón entre estudiantes que reportan desplazamiento y el total de estudiantes asignados a cada unidad; (ii) el *conteo de lesiones personales* agregado por unidad a partir de registros puntuales; y (iii) el *conteo de homicidios* agregado por unidad. Este conjunto atributivo sirvió exclusivamente para calibrar la regionalización temática contigua y para armonizar la exposición relativa entre unidades, manteniendo la independencia conceptual entre el soporte espacial del riesgo y sus eventuales determinantes causales.

El propósito de incorporar estos indicadores no fue explicativo, sino geométrico–estadístico: servir como base para el diseño de soportes alternativos a las divisiones administrativas

y para la construcción de la regionalización temática contigua. Este conjunto atributivo permitió identificar similitudes multivariantes entre celdas vecinas, calibrar niveles relativos de exposición y generar regiones internamente homogéneas, sin alterar la independencia conceptual entre la estructura espacial del riesgo y sus posibles determinantes causales. El diagnóstico previo a la modelación confirmó la pertinencia de los supuestos espacio–temporales. El análisis exploratorio reveló la presencia de autocorrelación espacial significativa entre unidades vecinas y persistencia temporal de corto plazo, condiciones necesarias para la inclusión de efectos estructurados del tipo ICAR/BYM/BYM2 y de un componente temporal *random walk* de primer orden. Asimismo, se identificaron posibles patrones de interacción no estacionaria, justificando la incorporación de un término espacio–tiempo bajo la tipología IV propuesta por Knorr-Held [43]. Estos hallazgos validaron empíricamente los principios establecidos en el Marco teórico y garantizaron que la posterior modelación bayesiana se apoyara sobre una base observacional depurada, coherente y estadísticamente estable [37].

## 5.3 Preparación de los datos

La fase de preparación constituyó el paso operativo que tradujo los principios conceptuales del Capítulo 4 en una estructura analítica lista para la modelación jerárquica bayesiana espacio–temporal. Su propósito fue consolidar un sistema de información coherente, verificable y reproducible que integrara los componentes espaciales, temporales y demográficos de manera consistente. En esta etapa se desarrollaron tres líneas de trabajo interdependientes: la estandarización y enriquecimiento de los registros observacionales, la construcción de unidades espaciales y regionalizaciones temáticas, y la redistribución censal que permitió estimar la exposición poblacional.

### 5.3.1 Estandarización, validación y enriquecimiento

La depuración de los registros incluyó procedimientos de detección de duplicados, verificación de variables esenciales (fecha, coordenadas y tipología del hecho) y validación espacial dentro del perímetro urbano oficial. Se corrigieron topónimos y errores de codificación de acuerdo con la cartografía base, garantizando la coherencia geométrica y semántica necesaria para derivar la matriz de adyacencia  $\mathbf{W}$  y el laplaciano  $\mathbf{L}$ , elementos fundamentales en los modelos CAR e ICAR [20].

El conjunto resultante se complementó con información contextual específicamente diseñada para la regionalización temática contigua. Se construyó un espacio atributivo  $\mathbf{X}$  a partir de tres insumos georreferenciados: (i) la *proporción de estudiantes* matriculados en instituciones educativas que declararon haber sido víctimas de desplazamiento forzado, estimada por superposición de capas (colegios georreferenciados y celdas/zonas) como razón entre estudiantes que reportan desplazamiento y el total de estudiantes asignados a cada unidad areal; (ii) el *número de lesiones personales* agregado por unidad a partir de registros puntuales georreferenciados; y (iii) el *número de homicidios* agregado por unidad a partir de sus registros puntuales. Estos indicadores no se emplearon como covariables explicativas en los modelos jerárquicos, sino como insumos geométrico–estadísticos para definir similitudes entre unidades vecinas y construir regiones internamente homogéneas. La disimilitud entre unidades  $i$  y  $j$  se calculó

mediante la distancia de Mahalanobis con covarianza regularizada,

$$d_{\text{attr}}(i, j) = \sqrt{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^\top \widehat{\Sigma}_\lambda^{-1} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)},$$

preservando la contigüidad topológica y alineando el soporte espacial con la estructura interna de los datos [57, 18].

lo que permitió agrupar celdas vecinas con perfiles homogéneos y preservar la contigüidad topológica del territorio. Este enfoque representó un avance respecto de las regionalizaciones basadas en criterios puramente administrativos, al diseñar unidades espaciales adaptadas a la estructura interna del fenómeno y consistentes con los principios de regionalización óptima propuestos por Assunção et al. [57] y Duque, Anselin y Rey [18].

### 5.3.2 Unidades espaciales y control del MAUP

En coherencia con la discusión teórica sobre el *Modifiable Areal Unit Problem* (MAUP) presentada en la Sección 4.2.3, se adoptó un enfoque multiescalar que combinó soportes regulares, administrativos y adaptativos. Se generaron grillas hexagonales regulares en el sistema EPSG:3116, con apotemas entre 500 y 2,500 metros, recortadas al perímetro urbano oficial, lo que proporcionó una base homogénea de unidades equivalentes en forma y tamaño. De manera paralela, se integró la división administrativa de barrios como referencia institucional, y se construyó una *regionalización temática contigua* derivada de la similitud multivariante entre unidades vecinas.

El procedimiento de regionalización se formalizó como un problema de optimización sobre grafos de contigüidad, en el que las aristas representan la vecindad entre unidades básicas y sus pesos  $\omega_{ij}$  la disimilitud socio–demográfica. A partir de este grafo se construyó un árbol generador mínimo y se aplicaron cortes controlados por criterios de homogeneidad interna, tamaño mínimo y exposición poblacional suficiente. El resultado fue un conjunto de regiones compactas, conexas y estables, que mitigaron los efectos de escala y zonificación propios del MAUP, garantizando consistencia estadística y territorial en las estimaciones posteriores [13, 14, 18]. Este diseño espacial multicapas —grillas, barrios y regiones temáticas— permitió contrastar la sensibilidad de los modelos a diferentes soportes y evaluar la robustez de los patrones inferidos.

### 5.3.3 Redistribución censal y proyección poblacional

El componente demográfico se construyó a partir del Censo Nacional de Población y Vivienda de 2018, redistribuyendo las manzanas censales sobre la malla hexagonal regular en EPSG:3116. Cada manzana se asignó a una celda según la localización de su centroide, asegurando una correspondencia unívoca y cobertura total del área urbana. La población censal de cada celda  $i$  se expresó como  $N_i^{(2018)}$ , y las proporciones relativas  $p_i$  se calcularon como:

$$p_i = \frac{N_i^{(2018)}}{\sum_{j=1}^n N_j^{(2018)}}, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Estas proporciones se usaron para generar la serie anual  $N_{it}$  mediante un cierre composicional:

$$N_{it} = p_i \times P_t^{(\text{ciudad})},$$

donde  $P_t^{(\text{ciudad})}$  corresponde a la proyección demográfica oficial del DANE para Medellín. El procedimiento mantuvo la coherencia global — $\sum_i N_{it} = P_t^{(\text{ciudad})}$ — y preservó la estructura espacial relativa del censo.

El supuesto de crecimiento espacialmente homogéneo se reconoció como una simplificación razonable para el nivel de agregación adoptado. Si bien puede inducir sesgos locales en zonas de reciente expansión o transformación demográfica, resulta apropiado cuando el interés analítico se centra en la dinámica relativa del riesgo, no en el volumen absoluto de población. Este enfoque prioriza la estabilidad inferencial sobre la exactitud demográfica puntual, en concordancia con las recomendaciones de la literatura sobre modelación espacio-temporal de eventos raros [35, 37].

En la modelación jerárquica, la población  $N_{it}$  se incorporó como término de exposición o *offset* en la verosimilitud Poisson,

$$\log \mu_{it} = \log N_{it} + \log \lambda_{it},$$

garantizando la interpretación de  $\lambda_{it}$  como tasa relativa o riesgo latente. Esta formulación preserva la coherencia probabilística de los conteos, conserva la relación varianza-media propia de los modelos de Poisson y evita los sesgos que se producen al tratar tasas precomputadas como observaciones independientes [20, 86]. De este modo, la población actúa como un componente de normalización que asegura comparabilidad entre unidades y periodos, al tiempo que estabiliza la varianza en áreas con baja exposición.

## 5.4 Modelado

La fase de modelación constituyó el núcleo técnico de la metodología, orientada a estimar la estructura espacio-temporal subyacente del homicidio en Medellín mediante modelos jerárquicos bayesianos. Esta etapa tradujo la información integrada y normalizada en la fase de preparación en un marco inferencial capaz de capturar simultáneamente la variabilidad espacial, la dinámica temporal y sus posibles interacciones, manteniendo coherencia con los principios expuestos en el Marco de referencia y las decisiones de diseño adoptadas en las secciones previas.

El análisis se desarrolló bajo un enfoque comparativo multiescalar, evaluando tres soportes espaciales complementarios: (i) grillas hexagonales regulares (apotemas 500–2,500 m), (ii) la división administrativa de **barrios**, y (iii) una **regionalización temática contigua**. Esta triangulación permitió examinar la estabilidad de los patrones inferidos frente a los efectos de escala y zonificación discutidos en la Sección 4.2.3.

### 5.4.1 Estructura general del modelo

El proceso de modelación siguió la formulación probabilística descrita en la Sección 4.3.1, donde los homicidios observados  $y_{it}$  se modelaron como conteos Poisson condicionados a una

tasa latente de riesgo  $\lambda_{it}$  y a la población  $N_{it}$  como término de exposición. Bajo el enlace logarítmico, la inferencia se centró en la estructura de la tasa subyacente, cuya representación jerárquica incorpora efectos espaciales, temporales y su posible interacción:

$$\log \lambda_{it} = \beta_0 + \xi_i + \gamma_t + \delta_{it}.$$

Esta descomposición permitió distinguir la variabilidad asociada al nivel global ( $\beta_0$ ), la dependencia espacial ( $\xi_i$ ), la tendencia temporal ( $\gamma_t$ ) y las fluctuaciones conjuntas espacio-temporales ( $\delta_{it}$ ). Los componentes latentes se modelaron mediante campos gaussianos de Markov (*GMRF*), aprovechando la estructura dispersa de las matrices de precisión para lograr eficiencia computacional en contextos de alta dimensionalidad [37].

### 5.4.2 Dependencias espaciales y temporales

El efecto espacial  $\xi_i$  se especificó utilizando estructuras autoregresivas condicionales ampliamente documentadas en la literatura bayesiana de áreas pequeñas: el modelo *Intrinsic Conditional Autoregressive* (ICAR), el modelo *Besag–York–Mollie* (BYM) [35], y su versión reparametrizada y escalada BYM2 [20]. La versión BYM2 se adoptó como referencia principal por su estabilidad numérica y su capacidad para mantener la interpretación de los parámetros entre distintas escalas espaciales, al combinar componentes estructurados (correlación entre unidades vecinas) y no estructurados (heterogeneidad local).

En el dominio temporal, el efecto  $\gamma_t$  se representó mediante un proceso *Random Walk* de primer orden (RW1), apropiado para capturar tendencias suaves y persistencias de corto plazo en series anuales [37].

En cuanto a la interacción espacio-temporal  $\delta_{it}$ , se evaluaron las cuatro estructuras propuestas por Knorr-Held [43] —Tipos I a IV—, que difieren en el grado de dependencia entre espacio y tiempo. Esta comparación permitió examinar escenarios que van desde la independencia completa (Tipo I) hasta la interacción combinada entre dependencias espaciales y temporales (Tipo IV).

### 5.4.3 Estructura jerárquica y priors

El modelo jerárquico resultante puede expresarse de forma resumida como:

$$y_{it} \mid \lambda_{it} \sim \text{Poisson}(N_{it}\lambda_{it}), \quad \log \lambda_{it} = \beta_0 + \xi_i + \gamma_t + \delta_{it},$$

donde los efectos espaciales y temporales son distribuciones Gaussianas Latentes con hiperparámetros de precisión  $\tau_\xi, \tau_\gamma, \tau_\delta$ . Estos hiperparámetros se regularizaron mediante *priors de complejidad penalizada* (PC-priors) [45], que inducen contracción hacia modelos base más simples y previenen el sobreajuste, favoreciendo interpretabilidad y estabilidad numérica.

Para los componentes intrínsecos —tanto espaciales (ICAR, BYM y BYM2) como temporales (RW1)— se impusieron restricciones de suma-cero con el fin de garantizar la identificabilidad del intercepto y la separación entre el nivel medio global del riesgo y sus variaciones relativas. En el caso de BYM2, dicha restricción se encuentra incorporada de manera implícita en la parametrización escalada del componente estructurado  $u_i^*$ , que asegura una media nula y una varianza unitaria promedio [20, 37].

## 5.5 Evaluación

La fase de evaluación constituyó el punto de convergencia entre la estimación y el análisis comparativo de los modelos, orientada a determinar cuál configuración ofrecía el mejor equilibrio entre ajuste estadístico, capacidad predictiva y eficiencia computacional. Esta etapa integró métricas internas de ajuste bayesiano con indicadores externos de desempeño fuera de muestra, manteniendo coherencia con los principios de parsimonia e interpretabilidad establecidos en el diseño metodológico.

### 5.5.1 Criterios de ajuste bayesiano

En primer lugar, se cuantificó el ajuste interno de cada modelo mediante criterios plenamente bayesianos derivados de la evidencia marginal aproximada. Se calcularon el *Deviance Information Criterion* (DIC) [82], que penaliza la complejidad mediante el número efectivo de parámetros; el *Watanabe–Akaike Information Criterion* (WAIC) [86], que evalúa la capacidad predictiva promedio considerando la varianza posterior del log-verosímil; y el *Leave–Group–Out Cross Validation* (LGOCV) [37], implementado a través de particiones espacio–temporales que preservan las dependencias estructuradas de los datos.

Estos tres indicadores se interpretaron de forma complementaria: valores menores de DIC y WAIC, o mayores de LPML (Log Pseudo–Marginal Likelihood), indicaron configuraciones con mejor compromiso entre ajuste y parsimonia. La comparación se realizó dentro de cada escala espacial —grillas, barrios y regiones temáticas—, permitiendo identificar la estructura jerárquica más coherente con la variabilidad observada y la menor complejidad efectiva.

### 5.5.2 Evaluación predictiva fuera de muestra

En segundo lugar, se evaluó la capacidad de generalización temporal y espacial mediante un esquema prospectivo de validación con ventanas deslizantes y horizonte  $h = 3$ , en correspondencia con la estrategia de predicción descrita en la Sección 4.3.6. En cada iteración, el modelo se ajustó sobre un subconjunto inicial de años y se proyectó sobre los tres años inmediatamente posteriores, permitiendo analizar la estabilidad temporal de las estimaciones y la degradación del desempeño predictivo con el incremento del horizonte. Para cada unidad espacial  $i$  y año  $t$ , se compararon las tasas observadas y estimadas por 100,000 habitantes:

$$\lambda_{it} = \frac{y_{it}}{N_{it}} \times 100,000, \quad \hat{\lambda}_{it} = \frac{\hat{\mu}_{it}}{N_{it}} \times 100,000.$$

y a partir de ellas se calcularon tres indicadores de desempeño:

$$\text{MAE} = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{(i,t) \in \mathcal{S}} |\hat{\lambda}_{it} - \lambda_{it}|, \quad \text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{(i,t) \in \mathcal{S}} (\hat{\lambda}_{it} - \lambda_{it})^2}, \quad \text{Bias} = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{(i,t) \in \mathcal{S}} (\hat{\lambda}_{it} - \lambda_{it}),$$

donde  $\mathcal{S}$  representa el conjunto de pares (unidad, año) reservados para validación. Estos indicadores permitieron evaluar tanto la precisión media como la estabilidad temporal del modelo, y detectar posibles sesgos sistemáticos en la estimación de tasas en áreas de baja exposición o alta incertidumbre.

### 5.5.3 Integración multicriterio

Los resultados de las métricas internas y externas se integraron en un marco de evaluación multicriterio que equilibró tres dimensiones: ajuste bayesiano, capacidad predictiva y complejidad efectiva. Para cada configuración se normalizaron las métricas relevantes —DIC, WAIC, LGOCV, RMSE y MAE— y se combinaron mediante un esquema de ponderación proporcional al poder discriminante de cada criterio. Este procedimiento permitió clasificar los modelos de manera coherente con su rendimiento global y seleccionar aquellos que ofrecían simultáneamente un ajuste adecuado, una estructura parsimoniosa y una capacidad predictiva estable.

El enfoque adoptado garantizó que la comparación no se basara únicamente en la bondad de ajuste, sino en el equilibrio entre precisión y robustez frente a la variabilidad de los datos. Los resultados completos del proceso de combinación, junto con los cuadros comparativos y la metodología de ponderación, se presentan en el Anexo 4.3.7.

## 5.6 Despliegue

La fase de despliegue constituyó el cierre operativo del proceso metodológico y tuvo como propósito trasladar los resultados del modelo jerárquico espacio-temporal a productos analíticos y visuales útiles para la gestión pública. A diferencia de las etapas previas, en esta fase no se modificó la estructura inferencial ni se recalibraron los hiperparámetros: el flujo de trabajo se ejecutó conforme a la versión validada y documentada, garantizando consistencia entre inferencia, predicción y comunicación de resultados.

El despliegue integró tres componentes principales: (i) la generación de proyecciones prospectivas de homicidio bajo incertidumbre explícita, (ii) la construcción de productos cartográficos y estadísticos para lectura territorial del riesgo, y (iii) la implementación de un esquema de actualización periódica que aseguró la sostenibilidad operativa del sistema.

### 5.6.1 Proyecciones prospectivas

El horizonte de predicción se definió a partir del último año observado  $T$ , extendiendo las estimaciones hacia periodos futuros  $\tilde{t} \in \{T + 1, \dots, T + H\}$  con base en las proyecciones poblacionales oficiales del DANE (hasta 2035). Para cada unidad espacial  $i$ , se generaron valores esperados de homicidios  $y_{i\tilde{t}}^*$  a partir de la distribución predictiva posterior del modelo:

$$y_{i\tilde{t}}^* \mid \text{datos} \sim \text{Poisson}(N_{i\tilde{t}} \lambda_{i\tilde{t}}^*), \quad \hat{\lambda}_{i\tilde{t}} = \frac{\mathbb{E}[y_{i\tilde{t}}^* \mid \text{datos}]}{N_{i\tilde{t}}} \times 100,000,$$

donde  $\lambda_{i\tilde{t}}^*$  corresponde a la tasa esperada de homicidios proyectada y  $N_{i\tilde{t}}$  al tamaño poblacional estimado. Cada predicción incluyó intervalos de credibilidad del 95 %, comunicando explícitamente la incertidumbre asociada al riesgo estimado. Las proyecciones se realizaron de manera coherente en las tres escalas espaciales consideradas —grillas hexagonales, barrios y regiones temáticas contiguas— manteniendo la comparabilidad entre soportes.

### 5.6.2 Productos analíticos y cartográficos

Las salidas del modelo se organizaron en productos reproducibles orientados a la interpretación aplicada y a la toma de decisiones territoriales. Se generaron tablas de pronóstico con tasas esperadas e intervalos de credibilidad por unidad espacial, junto con series temporales que combinaron las observaciones históricas y las trayectorias proyectadas del riesgo.

A partir de estas estimaciones se elaboraron mapas de riesgo prospectivo que representaron tanto las tasas esperadas como la amplitud de la incertidumbre para cada horizonte de predicción. La simbología y escala cromática se mantuvieron constantes a lo largo de los periodos y resoluciones espaciales, garantizando coherencia visual y comparabilidad temporal.

Asimismo, se produjeron listados de priorización territorial que ordenaron las unidades según su tasa esperada y el límite superior del intervalo de credibilidad. Este criterio conservador permitió identificar zonas críticas bajo el principio de precaución, considerando simultáneamente magnitud y certidumbre del riesgo. La lectura conjunta de los resultados en grillas, barrios y regiones temáticas facilitó la articulación de distintos niveles de decisión: microterritorial en las celdas, operativo en los barrios y estratégico en las agregaciones temáticas.

# Capítulo 6

## Resultados

### 6.1 Análisis descriptivo

El análisis descriptivo constituye la primera fase empírica del proceso metodológico, correspondiente a la etapa de *Comprensión de los datos* dentro del marco CRISP-DM. Su propósito es examinar la estructura espacio-temporal de los homicidios en la zona urbana de Medellín, identificando patrones persistentes y transiciones que orienten el diseño y la evaluación de los modelos jerárquicos bayesianos implementados mediante INLA. Más que una descripción exploratoria, esta sección establece las condiciones estadísticas y espaciales que garantizan la coherencia de las inferencias posteriores.

El ámbito de análisis se restringe a la zona urbana del municipio, excluyendo los corregimientos rurales con el fin de preservar homogeneidad en la densidad poblacional, la cobertura de datos y la estructura territorial. Esta delimitación permite concentrar el estudio en las áreas donde la dinámica del homicidio presenta mayor intensidad, continuidad temporal y relevancia para la planeación urbana, evitando sesgos derivados de las diferencias estructurales entre territorios rurales y urbanos.

El estudio adopta una perspectiva multiescalar sustentada en la comparación entre unidades espaciales de distinta naturaleza. En una primera etapa se utiliza la división político-administrativa oficial (barrios y comunas), lo que facilita la articulación de los resultados con las políticas públicas y los instrumentos de planeación institucional. En una segunda etapa se introduce una discretización alternativa mediante grillas hexagonales regulares, cuya geometría isotrópica permite representar el espacio urbano de forma continua y mitigar los efectos del problema de las unidades espaciales modificables (*Modifiable Areal Unit Problem*, MAUP).

Las grillas se organizaron jerárquicamente en dos niveles complementarios:

1. *Grillas elementales*, definidas por celdas hexagonales de apotema comprendida entre 500 y 2500 metros, empleadas como unidades mínimas de observación espacial.
2. *Grillas regionalizadas*, construidas mediante un proceso de agregación espacial contigua sobre las grillas elementales, con el propósito de capturar interdependencias territoriales

y comportamientos colectivos del fenómeno.

Cada regionalización parte del conjunto base de grillas elementales, conformando siempre pares comparables entre niveles —elemental y regionalizado. En algunos casos, la similitud geométrica entre las unidades agregadas y sus celdas originales es alta, lo que permite evaluar empíricamente la sensibilidad de las tasas de homicidio frente a la escala y la forma de agregación espacial.

El análisis se estructura en tres bloques complementarios:

- *Patrón espacial*, que caracteriza la distribución geográfica de las tasas crudas de homicidio en los distintos niveles de agregación, identificando zonas de concentración y de baja incidencia.
- *Patrón temporal*, que examina la evolución anual de las tasas durante el periodo 2003–2024, con énfasis en rupturas y transiciones asociadas a dinámicas sociopolíticas y criminales.
- *Patrón espacio–temporal*, que integra ambas dimensiones para detectar persistencias, desplazamientos o emergencias de focos de violencia a lo largo del tiempo.

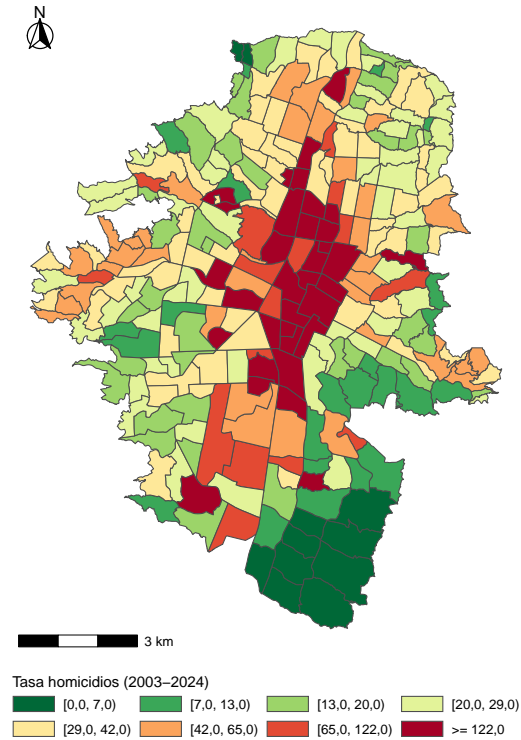
### 6.1.1 Patrón espacial

El análisis espacial constituye el primer bloque descriptivo del estudio y tiene como objetivo caracterizar la distribución geográfica de las tasas de homicidio en la zona urbana de Medellín durante el periodo 2003–2024. Este ejercicio permite identificar concentraciones, contrastes territoriales y efectos asociados a la escala de observación. Para ello, se emplean tres representaciones complementarias del territorio: la división político–administrativa por barrios, las grillas hexagonales elementales y las grillas regionalizadas derivadas de estas últimas.

La Figura 6.1 muestra la distribución de las tasas de homicidio por barrio. Se observa una marcada heterogeneidad espacial, con valores que varían desde aproximadamente 1 hasta más de 16 000 homicidios por cada 100 000 habitantes. Estas diferencias extremas se explican, en gran medida, por la variabilidad en el tamaño poblacional de los polígonos: en barrios con población residente muy reducida —como zonas industriales o con alta proporción de usos no residenciales—, incluso un número pequeño de homicidios genera tasas desproporcionadamente elevadas. Este efecto, común en el análisis de áreas pequeñas, resalta la importancia de utilizar unidades espaciales más homogéneas que representen de manera consistente el riesgo relativo.

El patrón espacial revela una clara concentración de altas tasas en el centro y el nororiente de la ciudad, especialmente en las comunas La Candelaria, Aranjuez y Popular. Estas zonas combinan alta densidad de actividades económicas y flujos poblacionales con condiciones socioeconómicas desfavorables, conformando entornos de riesgo persistente. En contraste, los sectores del sur y sureste —particularmente El Poblado y Guayabal— exhiben tasas notablemente inferiores, asociadas a mejores condiciones de infraestructura, ingreso y cohesión social.

Con el fin de reducir los efectos del problema de las unidades espaciales modificables (MAUP) y eliminar la dependencia de los límites administrativos, se construyeron grillas hexagonales



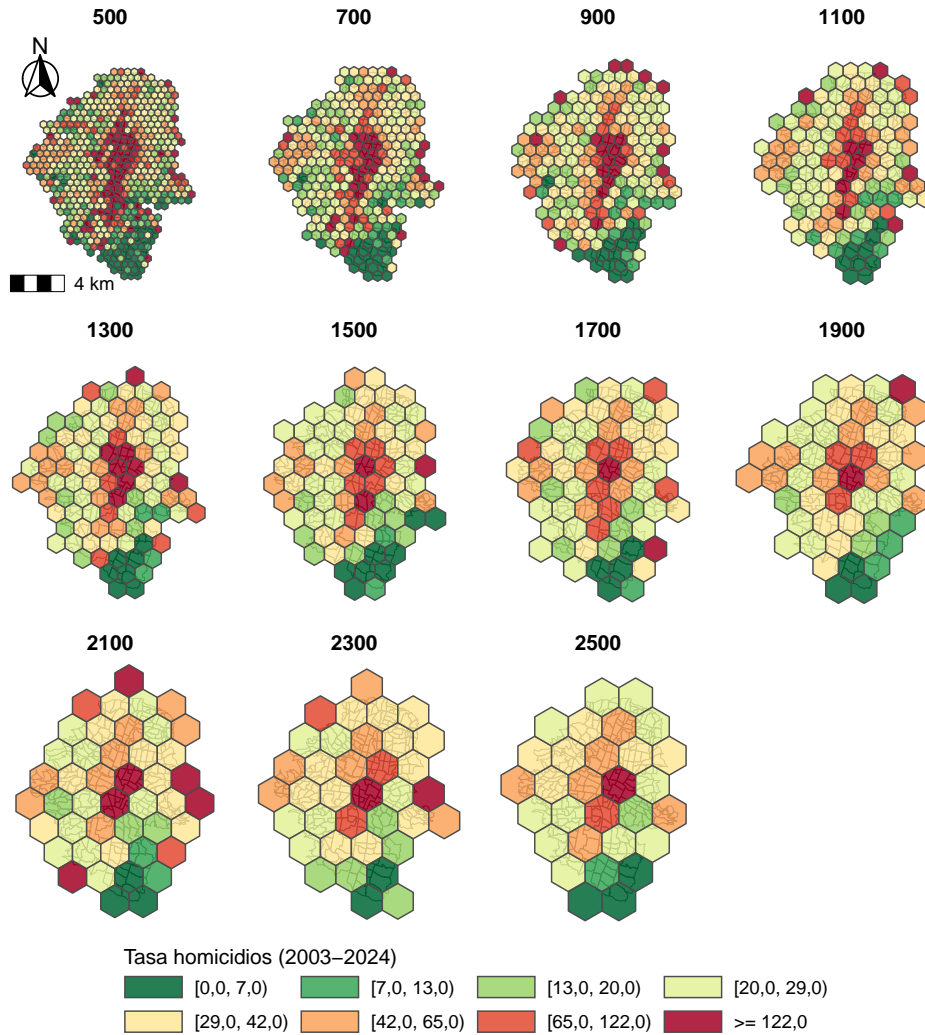
**Figura 6.1.** Tasa de homicidios por barrio en la zona urbana de Medellín (2003–2024).

elementales con apotemas comprendidas entre 500 y 2 500 metros (Figura 6.2). Esta representación proporciona una cobertura uniforme del espacio urbano y permite una comparación directa entre celdas equivalentes en tamaño y forma.

En esta escala, el patrón espacial mantiene la concentración central y nororiental observada en los mapas por barrios, pero con una transición más continua entre áreas de alta y baja incidencia. La homogeneidad geométrica de las celdas facilita la identificación de gradientes espaciales del riesgo y atenúa la influencia de valores extremos. Las tasas más elevadas se concentran nuevamente en el centro tradicional (La Candelaria) y en los corredores nororientales históricamente vinculados con economías ilícitas y procesos de exclusión social. En cambio, la franja sur y suroccidental mantiene valores bajos y estables a lo largo del periodo, rara vez superiores a 20 homicidios por 100 000 habitantes.

La Figura 6.3 presenta los resultados obtenidos a partir de la regionalización de las grillas elementales, proceso que agrupa celdas contiguas para conformar unidades mayores de observación. Este procedimiento busca capturar interdependencias territoriales y mitigar la variabilidad aleatoria asociada a áreas con baja población o escasos eventos observados.

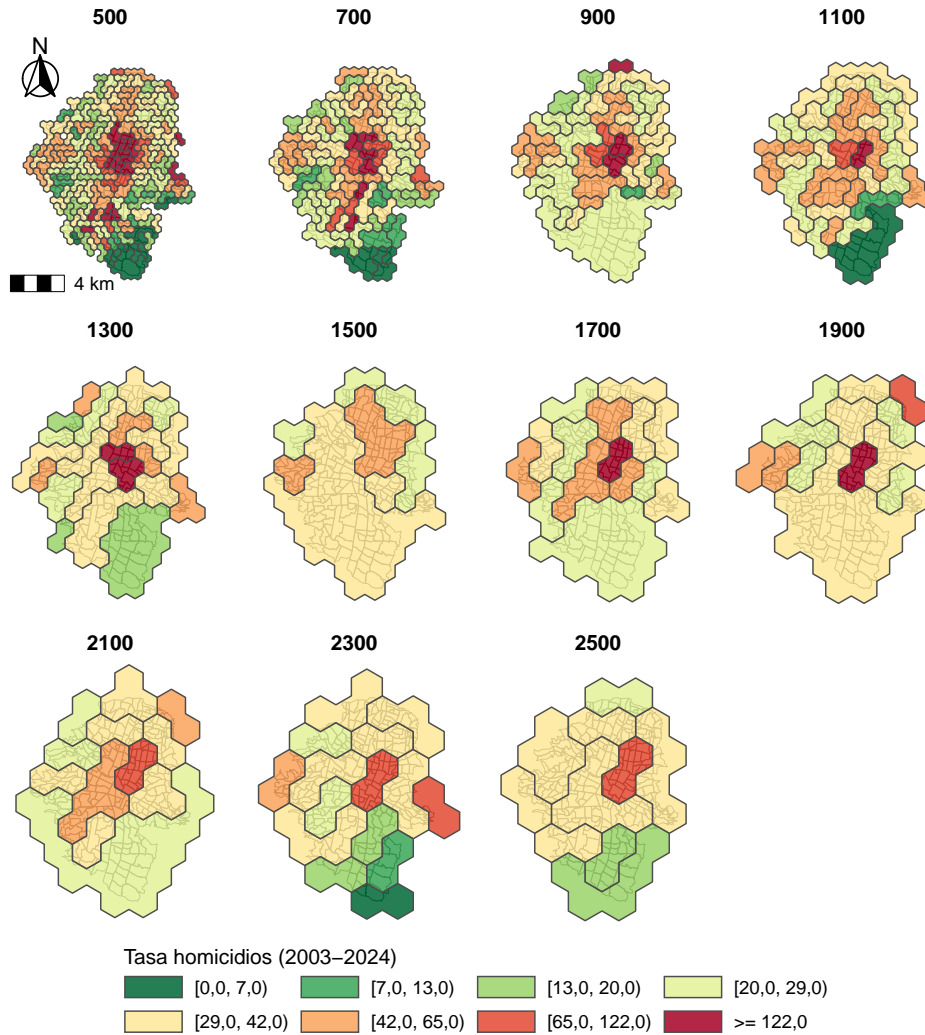
El proceso de agregación espacial produce una suavización significativa del mapa de tasas, reduciendo la dispersión y eliminando los valores extremos observados en las grillas más finas. Aun así, el patrón estructural se mantiene: el centro y el nororiente continúan siendo los principales focos de violencia letal, mientras que el sur y el occidente de la ciudad presentan niveles persistentemente bajos. En algunos casos, las unidades regionalizadas conservan una geometría similar a la de sus celdas originales, lo que permite evaluar de forma directa la



**Figura 6.2.** Tasa de homicidios según grillas hexagonales elementales (2003–2024).

sensibilidad de las estimaciones frente al cambio de escala.

Así pues, el homicidio en Medellín presenta una marcada concentración espacial y una fuerte desigualdad territorial. Las diferencias entre las representaciones basadas en barrios y aquellas construidas con grillas regulares evidencian la relevancia de la unidad de análisis en la estimación del riesgo. Mientras la división administrativa refleja heterogeneidad poblacional y morfológica, el sistema de grillas hexagonales —tanto elementales como regionalizadas— proporciona una base geométrica más estable y estadísticamente coherente para los análisis subsiguientes. En las secciones siguientes, esta estructura se adopta como soporte para la modelación jerárquica espacio–temporal, garantizando comparabilidad entre escalas y robustez en la inferencia.

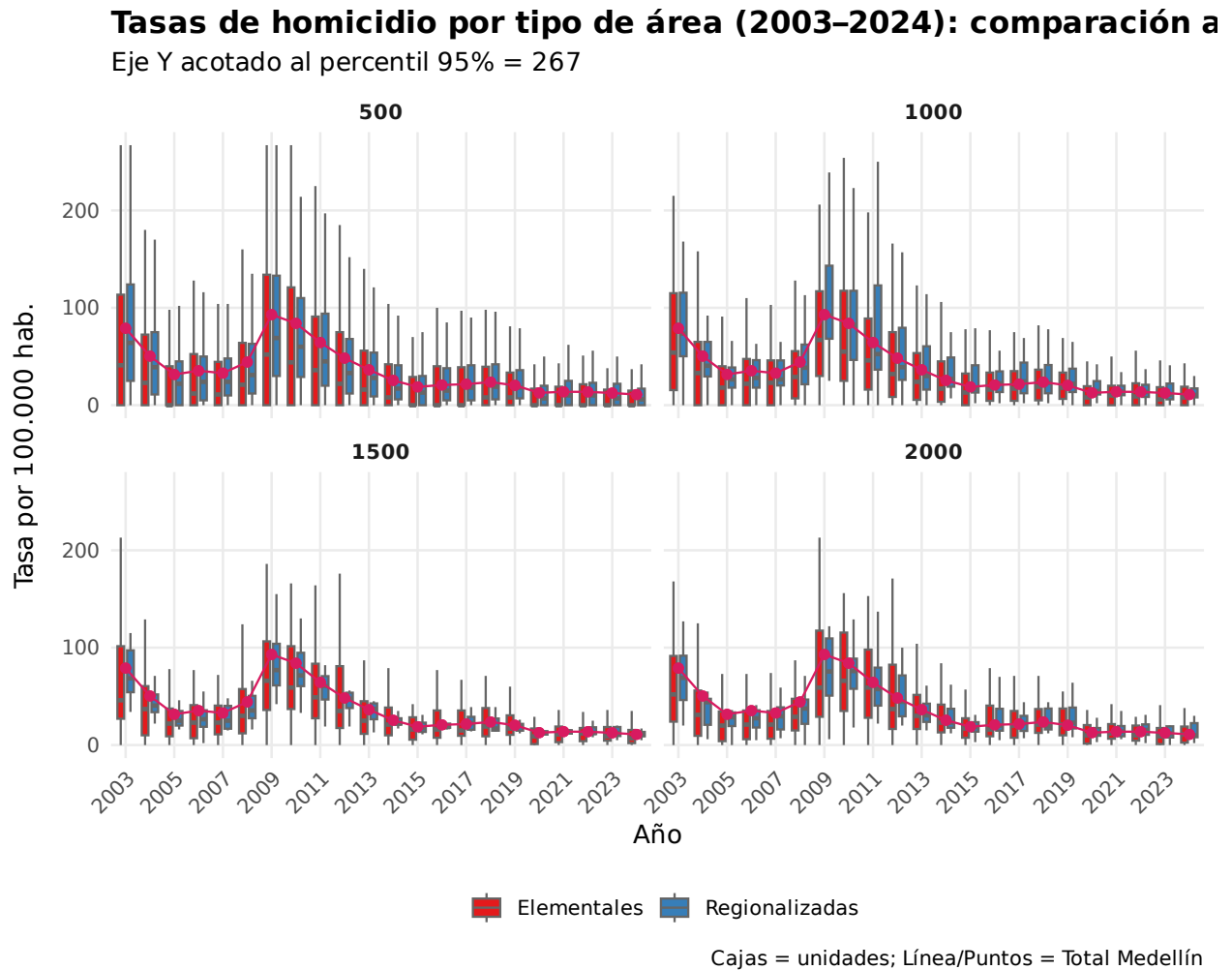


**Figura 6.3.** Tasa de homicidios según grillas hexagonales regionalizadas (2003–2024).

### 6.1.2 Patrón temporal

El análisis temporal de la violencia letal en Medellín abarca el periodo 2003–2024 y tiene como propósito examinar la evolución de las tasas de homicidio y sus variaciones interanuales a lo largo de dos décadas. Para ello se emplean cuatro configuraciones espaciales representativas —grillas hexagonales elementales y sus correspondientes regionalizaciones con apotemas de 500, 1 000, 1 500 y 2 000 metros— seleccionadas por su cobertura y estabilidad. Estas configuraciones permiten ilustrar de forma clara los patrones generales del fenómeno sin redundar en resultados equivalentes. La comparación entre pares de grillas evidencia la coherencia de la tendencia global, así como las diferencias atribuibles a la escala espacial de agregación.

La Figura 6.4 muestra la evolución temporal de las tasas de homicidio en la zona urbana de Medellín. En cada panel, la línea continua con puntos representa la tasa urbana total del municipio, mientras que las cajas reflejan la dispersión anual de las tasas a nivel de unidad espacial —tanto elemental como regionalizada. El eje vertical se acotó al percentil 95 % con



**Figura 6.4.** Evolución anual de la tasa de homicidios por tipo de área (2003–2024). Convenciones: línea continua y puntos = tasa urbana total de Medellín; cajas = distribución anual de tasas por unidad espacial (grillas elementales y regionalizadas). Eje Y truncado al percentil 95 % (= 267).

el fin de reducir la influencia de valores extremos provenientes de áreas con baja población o registros aislados de eventos.

El comportamiento temporal evidencia tres fases estructurales bien definidas:

1. *2003–2007: descenso sostenido.* Periodo caracterizado por una reducción pronunciada de las tasas de homicidio, vinculada con la desmovilización parcial de estructuras armadas ilegales y una relativa estabilización institucional. Si bien la tasa general disminuye, algunos sectores del nororiente conservaron niveles elevados pese a la mejora global [5].
2. *2008–2010: recrudescimiento abrupto.* Se observa un aumento significativo de la violencia letal, coincidente con la fragmentación de redes criminales tras la captura y extradición de líderes del narcotráfico local. El vacío de poder derivado de estos eventos generó disputas territoriales intensas, particularmente en zonas centrales y de transición entre comunas, elevando las tasas de manera generalizada [5].
3. *2011–2024: estabilización y heterogeneidad persistente.* A partir de 2011 se registra una tendencia descendente y posterior estabilización en niveles históricamente bajos, si bien persisten contrastes territoriales notables. En las grillas regionalizadas la varianza interanual disminuye, reflejando un proceso de suavización asociado tanto al mayor tamaño de las unidades como a la reorganización de las estructuras criminales hacia dinámicas menos visibles. Hacia 2024, Medellín presenta tasas estables y moderadas en el contexto histórico reciente, con núcleos localizados de alta incidencia.

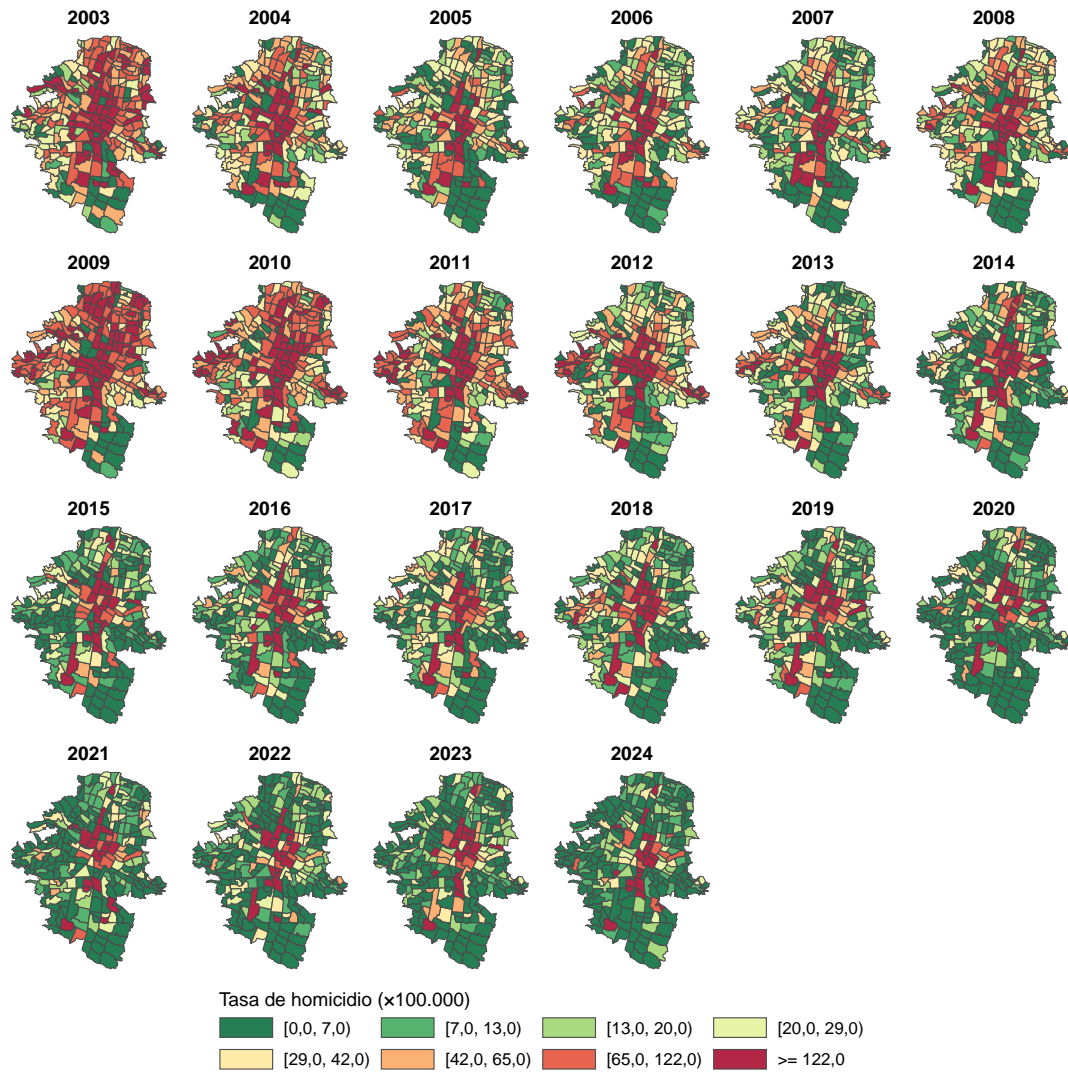
La comparación entre escalas confirma la coherencia estructural del fenómeno: las tendencias globales se mantienen, mientras que las diferencias entre grillas elementales y regionalizadas se manifiestan principalmente en la variabilidad interanual. Las unidades elementales, por su menor tamaño, capturan mejor la volatilidad local y los picos asociados a eventos singulares; las regionalizaciones, en cambio, suavizan el comportamiento y permiten una lectura más estable y representativa del proceso.

El análisis temporal constituye un insumo clave para la modelación jerárquica espacio-temporal desarrollada en los capítulos siguientes, pues proporciona evidencia empírica sobre la estabilidad, persistencia y gradientes de cambio de la violencia letal en Medellín.

### 6.1.3 Patrón espacio-temporal

El análisis espacio-temporal permite examinar la evolución conjunta del homicidio en Medellín, considerando simultáneamente la dimensión temporal y la estructura espacial del fenómeno. Esta fase busca identificar la persistencia, desplazamiento y reorganización de los focos de violencia en la zona urbana entre 2003 y 2024, utilizando representaciones territoriales consistentes y comparables. Se analizan tres aproximaciones complementarias: la división político-administrativa por barrios, una grilla hexagonal elemental con apotema de 2 200 metros y su correspondiente regionalización. Estas configuraciones fueron seleccionadas por su capacidad para captar la dinámica del fenómeno con distintos niveles de detalle y estabilidad estadística.

La Figura 6.5 muestra la evolución anual de las tasas de homicidio por barrios. Durante



**Figura 6.5.** Evolución espacio-temporal de la tasa de homicidios por barrios en la zona urbana de Medellín (2003–2024). Escala logarítmica acotada a los percentiles 1–99 para reducir la influencia de valores extremos.

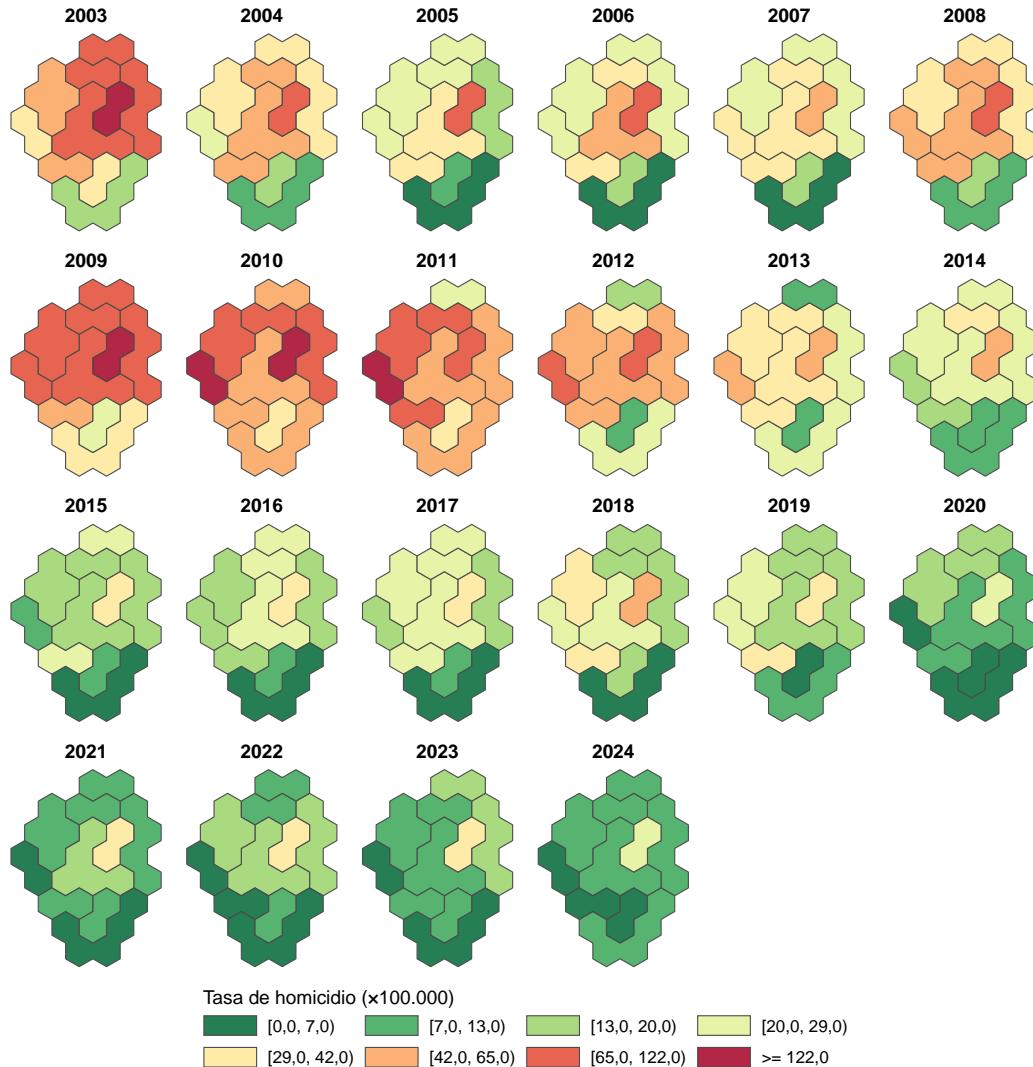
el primer subperiodo (2003–2007) se evidencia una concentración marcada de altas tasas en el centro y el nororiente de la ciudad, especialmente en la comuna La Candelaria y los sectores colindantes de Aranjuez y Popular. Entre 2008 y 2010 se registra un repunte abrupto y una expansión espacial del fenómeno, vinculados con procesos de recomposición criminal y disputas territoriales. En el periodo 2011–2018 los mapas reflejan una reducción sostenida y una contracción de los focos de violencia, alcanzando niveles históricamente bajos. Finalmente, entre 2019 y 2024 se observa una estabilización general, con la reaparición de núcleos localizados de alta incidencia en el centro tradicional y el nororiente.



**Figura 6.6.** Evolución espacio–temporal de la tasa de homicidios según grillas hexagonales elementales (apotema = 2 500 m) en la zona urbana de Medellín (2003–2024).

El mapa basado en grillas hexagonales elementales (Figura 6.6) ofrece una lectura más uniforme del espacio urbano al eliminar la dependencia de los límites administrativos. Los

patrones observados reproducen la tendencia general identificada a nivel de barrios, pero con una representación más continua del gradiente espacial del riesgo. La grilla elemental de 2 500 metros capta con precisión las áreas de persistencia, especialmente el eje central-nororiental, a la vez que muestra una reducción progresiva de la extensión de las zonas críticas. Esta configuración equilibra el detalle local con la estabilidad estadística, evitando la sobrefragmentación asociada a celdas de menor tamaño.



**Figura 6.7.** Evolución espacio-temporal de la tasa de homicidios en grillas regionalizadas (base = 2 500 m) en la zona urbana de Medellín (2003–2024).

La Figura 6.7 presenta la evolución equivalente para las grillas regionalizadas derivadas de la base de 2 500 metros. Este proceso de agregación genera unidades mayores y más homogéneas internamente, reduciendo la variabilidad asociada a poblaciones pequeñas sin perder la estructura general del riesgo. En este nivel, la superficie de tasas adquiere una apariencia más continua y los gradientes espaciales se suavizan, lo que facilita identificar la estabilidad de los focos históricos de violencia y las transiciones graduales hacia zonas

de menor incidencia. El patrón temporal se mantiene coherente: máximos entre 2008–2010, descenso sostenido hasta 2018 y estabilización posterior, con persistencia de los núcleos críticos observados en las representaciones más detalladas.

La comparación entre los tres niveles —barrios, grillas elementales y regionalizadas— confirma la robustez del patrón espacio–temporal del homicidio en Medellín. Pese a las diferencias en la unidad de observación, los mapas convergen en destacar la concentración estructural del riesgo en el eje central–nororiental y la estabilidad de esta configuración a lo largo de dos décadas. Las grillas regionalizadas, en particular, proporcionan una representación más estable y estadísticamente eficiente del fenómeno, mientras que las grillas elementales capturan con mayor sensibilidad la heterogeneidad local. Esta coherencia inter-escala refuerza la validez empírica de los patrones observados y sienta las bases para la modelación jerárquica espacio–temporal desarrollada en las secciones siguientes.

## 6.2 Estructura espacio–temporal y diseño del modelo bayesiano

El modelado espacio–temporal del homicidio en Medellín se inscribió en el marco de los *Modelos Gaussianos Latentes* (LGM) con verosimilitud Poisson y término de exposición poblacional, tal como se formuló en la Sección 4.3.1, y se estimó mediante la aproximación determinista *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA), descrita en la Sección 4.3.5. En este apartado se resume la estructura estadística efectivamente implementada en los análisis y el diseño comparativo seguido para contrastar configuraciones sobre las tres particiones espaciales de interés: grilla hexagonal, barrios y regionalización temática contigua.

### 6.2.1 Estructura general del modelo

Consistentemente con la Sección 4.3.1, el número de homicidios en la unidad espacial  $i$  y año  $t$  se modeló como un conteo Poisson cuya media es proporcional a la población residente  $N_{it}$ . La tasa latente de homicidio se expresó en escala logarítmica como una suma de cuatro componentes: un nivel global, un efecto espacial, una trayectoria temporal y una interacción espacio–tiempo.

En notación compacta, el riesgo relativo subyacente se representó mediante un predictor lineal aditivo con la descomposición

$$\log \lambda_{it} = \beta_0 + \xi_i + \gamma_t + \delta_{it},$$

ya introducida en el Marco de referencia (Sección 4.3.1). No se incorporaron covariables exógenas a nivel de área; el objetivo fue capturar la estructura latente del riesgo y su persistencia espacio–temporal bajo diferentes soportes espaciales. Todos los componentes aleatorios se formularon como campos gaussianos de Markov con matrices de precisión dispersas, manteniendo coherencia con el esquema LGM detallado en la Sección 4.3.5.

## 6.2.2 Dependencia espacial

El efecto espacial  $\xi_i$  se definió sobre un grafo de contigüidad de primer orden construido para cada partición (grilla, barrios y regionalización), de acuerdo con la estructura de vecindad y el laplaciano espacial introducidos en la Sección 4.3.2. A partir de este soporte se evaluaron tres familias de modelos de área ampliamente utilizadas en la literatura:

- ICAR intrínseco, que induce suavizamiento por vecindad a partir del laplaciano escalado y requiere restricciones de suma-cero para asegurar identificabilidad.
- Modelo BYM clásico, que descompone el efecto espacial en una parte estructurada (ICAR) y otra no estructurada (iid), permitiendo separar variación local idiosincrática de variación espacial suavizada.
- Modelo BYM2 reparametrizado, que combina un ICAR escalado y un término iid mediante un parámetro de mezcla y concentra la escala total en una única precisión, haciendo comparables los hiperparámetros entre distintas mallas [20].

Las formulaciones matriciales de estas estructuras, así como el papel del escalamiento del laplaciano y de las matrices de precisión resultantes, se desarrollaron con detalle en la Sección 4.3.2. En todos los casos se utilizaron *priors de complejidad penalizada* (PC-priors) para las precisiones y parámetros de mezcla, siguiendo los lineamientos de la Sección 6.2.4, con el fin de evitar sobre-suavizado y preservar una interpretación estable de los hiperparámetros al cambiar de resolución espacial.

## 6.2.3 Dependencia temporal e interacción espacio-tiempo

La trayectoria temporal  $\gamma_t$  se especificó como un *random walk* de primer orden (RW1), de acuerdo con la construcción general expuesta en la Sección 4.3.3. Esta elección penaliza diferencias sucesivas y favorece evoluciones suaves en el tiempo, adecuadas para series anuales de homicidios. Se impusieron restricciones de suma-cero para separar el nivel medio global de las variaciones temporales relativas.

La interacción espacio-tiempo  $\delta_{it}$  se formuló siguiendo la tipología de Knorr-Held [43], utilizando la representación mediante productos de Kronecker entre las matrices de estructura espacial y temporal descrita en la Sección 4.3.4. En concreto, se ajustaron las cuatro estructuras de interacción propuestas por dichos autores (Tipos I–IV), que difieren en la presencia o ausencia de dependencia estructurada en cada dimensión:

- Tipo I: interacción no estructurada ni en espacio ni en tiempo.
- Tipo II: interacción estructurada sólo en el tiempo.
- Tipo III: interacción estructurada sólo en el espacio.
- Tipo IV: interacción estructurada simultáneamente en espacio y tiempo.

Las restricciones de suma-cero necesarias para garantizar identificabilidad frente a los efectos principales, así como la construcción explícita de las matrices de precisión asociadas, se retomaron de la formulación de Goicoa, Etxeberria y Ugarte [79] y se sintetizan en la

Tabla 4.1.

### 6.2.4 Hiperparámetros y especificación de priors

La elección de hiperparámetros y distribuciones previas constituyó un componente esencial del diseño del modelo, en tanto determinó el grado de regularización aplicado a los efectos espaciales, temporales e interacción espacio-temporal. Dado que los modelos implementados corresponden a *Modelos Gaussianos Latentes* con componentes intrínsecos (ICAR, RW1 y las interacciones Tipo II–IV), la especificación de priors debía garantizar identificabilidad, estabilidad numérica y comparabilidad entre mallas espaciales, particularmente bajo reparametrizaciones como BYM2. En esta sección se resume la parametrización adoptada y la forma en que cada prior controla la complejidad del modelo sin introducir información externa que pudiera sesgar la inferencia.

Sea  $\sigma \in \{\sigma_\xi, \sigma_\gamma, \sigma_\delta\}$  la desviación estándar de cada componente gaussiana del campo latente (espacial, temporal e interacción) y  $\tau = 1/\sigma^2$  su precisión asociada. Para estas escalas se consideraron dos formulaciones equivalentes:

$$\begin{aligned}\pi(\sigma) &\propto 1, & \sigma > 0, \\ \pi(\tau) &= \frac{1}{2} \tau^{-3/2}, & \tau > 0,\end{aligned}$$

que corresponden a una prior impropia uniforme en  $\sigma$  y su inducida en  $\tau$ ; o bien una *prior de complejidad penalizada* (PC) calibrada mediante

$$\Pr(\sigma > 1) = 0,01,$$

que contrae hacia el modelo base sin variabilidad y se implementa sobre  $\tau$  o sobre  $\sigma$  en forma equivalente [19, 21].

Para la reparametrización BYM2, el parámetro de mezcla  $\phi \in [0, 1]$  representa la proporción de variabilidad estructurada. Se adopta

$$\phi \sim \text{Uniform}(0, 1),$$

o, de forma alternativa, una prior PC con calibración neutral

$$\Pr(\phi > 0,5) = 0,5,$$

que evita favorecer a priori patrones excesivamente estructurados o no estructurados [19, 20].

El intercepto se modeló con una normal de varianza grande,

$$\beta_0 \sim \mathcal{N}(0, 1000),$$

lo que permite separar el nivel global de los efectos centrados del campo latente [19].

## 6.2.5 Diseño comparativo y evaluación

El diseño comparativo se estructuró a partir de la combinación sistemática de tres componentes fundamentales del modelo jerárquico espacio–temporal: (i) el soporte espacial, (ii) la estructura de dependencia espacial y (iii) la tipología de interacción espacio–tiempo. Este esquema permitió contrastar, de manera controlada, el impacto de la elección del soporte geográfico (grilla hexagonal, barrios y regionalización temática), así como el efecto de las distintas formas de regularización espacial y espacio–temporal.

Para cada una de las tres particiones espaciales consideradas se estimaron modelos que combinaron:

1. una de las estructuras de dependencia espacial ICAR, BYM o BYM2, según lo expuesto en la Sección 4.3.2;
2. un efecto temporal de tipo *random walk* de primer orden (RW1), coherente con la formulación de la Sección 4.3.3;
3. y una de las cuatro tipologías de interacción espacio–temporal propuestas por Knorr-Held [43] (Tipos I–IV), descritas en la Sección 4.3.4.

Se impusieron las restricciones de suma–cero necesarias para la identificabilidad, conforme a la Tabla 4.1: centrado de los efectos espacial (ICAR/BYM2) y temporal (RW1), junto con las condiciones sobre la interacción según el tipo considerado (I–IV). La estimación se realizó en R-INLA, dentro del marco de modelos Gaussianos Latentes descrito en la Sección 4.3.5, con control de semillas, registro de hiperparámetros y almacenamiento de resultados para asegurar reproducibilidad.

La evaluación de las configuraciones se llevó a cabo mediante los criterios estadísticos presentados en la Sección 4.3.7. En particular, se emplearon dos tipos de evidencia complementaria:

- **criterios in-sample penalizados por complejidad:** WAIC, DIC y LPML (vía CPO), que permiten evaluar ajuste y parsimonia dentro del marco jerárquico bayesiano;
- **validación fuera de muestra:** un esquema prospectivo de ventanas temporales deslizantes, diseñado para medir la capacidad de predicción de corto plazo, complementado mediante ejercicios de *Leave-Group-Out Cross-Validation* (LGOCV) en bloques espacio–temporales, siguiendo la estrategia de predicción de la Sección 4.3.6.

Todos los pasos del proceso comparativo —incluyendo la estandarización de métricas, la clasificación de unidades en escenarios espaciales (Hotspots, Coldspots, Resto y Agregado), la construcción del índice compuesto de desempeño y el filtrado jerárquico de configuraciones— se desarrollaron conforme al protocolo detallado en el Anexo .1. Este protocolo, diseñado específicamente para la presente tesis, integra medidas de ajuste, parsimonia y capacidad predictiva en un sistema de evaluación transparente y reproducible. La selección final de modelos por partición espacial se fundamentó estrictamente en este marco, garantizando consistencia metodológica y robustez empírica en los resultados presentados en las secciones posteriores.

## 6.3 Criterios comparativos de ajuste y capacidad predictiva

Esta sección presenta los resultados del proceso comparativo aplicado a los modelos espacio-temporales estimados, integrando la evidencia de ajuste penalizado con la evaluación prospectiva fuera de muestra. El objetivo es identificar configuraciones que logren un equilibrio adecuado entre precisión, estabilidad y parsimonia, siguiendo el protocolo diseñado para esta tesis y documentado en el Anexo .1.

### 6.3.1 Diseño experimental y combinatoria de modelos

El conjunto evaluado estuvo conformado por 528 modelos que surgen de combinar los soportes espaciales, las estructuras de dependencia y las interacciones espacio-temporales definidas en el capítulo metodológico. La amplitud de este diseño factorial permitió examinar de forma sistemática el efecto de la resolución espacial y de la estructura del campo latente sobre los criterios de ajuste y la coherencia inferencial.

### 6.3.2 Evaluación comparativa de ajuste y reducción del universo de modelos

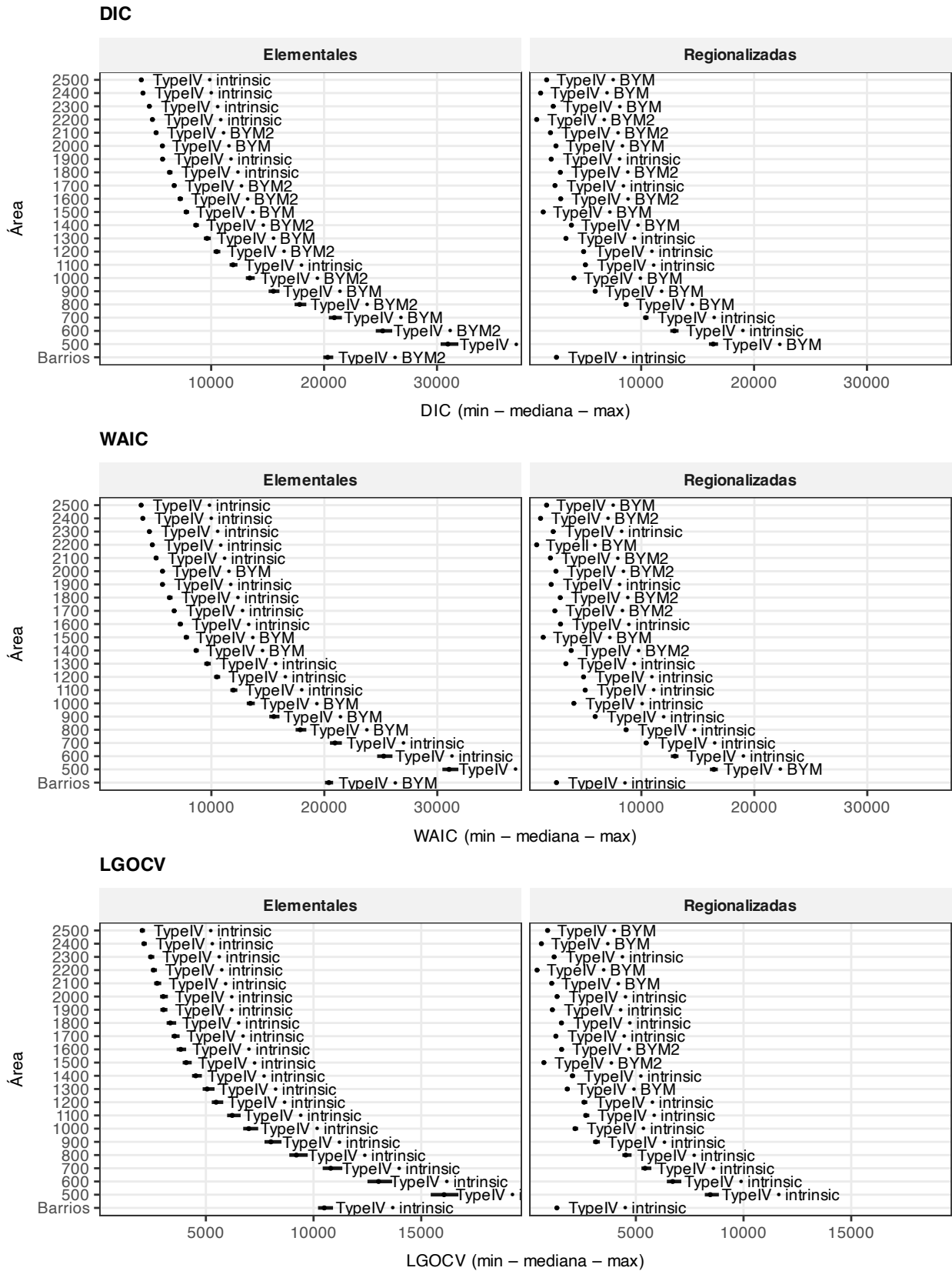
La evaluación *in-sample* se fundamentó en las métricas DIC, WAIC y LGOCV, junto con medidas de parsimonia y tiempo de ejecución, siguiendo los lineamientos de la Sección 4.3.7. Estos indicadores se integraron mediante el índice multicriterio desarrollado para esta tesis (Anexo .1), cuyo propósito es identificar configuraciones con ajuste penalizado estable, evitando modelos sobreparametrizados o con rendimiento inconsistente.

La Figura 6.8 sintetiza de forma compacta la tripleta de ajuste. Cada segmento horizontal muestra la variabilidad de una métrica para una escala espacial dada, mientras que el punto central corresponde a la mediana. La longitud del segmento refleja la sensibilidad del ajuste frente a las combinaciones de interacción y estructura espacial: rangos cortos indican comportamientos casi equivalentes entre configuraciones, mientras que rangos amplios sugieren mayor dependencia del supuesto estructural.

Dos patrones emergen con claridad. En primer lugar, en las áreas *elementales* la calidad de ajuste mejora gradualmente a medida que incrementa el apotema: las mallas más finas presentan variabilidad elevada y valores menos favorables, mientras que a partir de los 1 800–2 000 m los segmentos se acortan y las medianas se desplazan hacia rangos más competitivos. En segundo lugar, en las *regionalizaciones* se observa una estabilidad notable entre 1 100 y 2 500 m: los segmentos son cortos, alineados en los rangos bajos de DIC, WAIC y LGOCV, lo que evidencia que estas escalas proporcionan un soporte robusto y estable para la modelación. Sólo las resoluciones por debajo de 1 000 m presentan un deterioro claro asociado a exposiciones muy reducidas.

Además del efecto de escala, la figura muestra un patrón estructural en la interacción espacio-temporal. La tipología Tipo IV domina sistemáticamente los valores de mejor ajuste, especialmente en combinación con la estructura espacial *intrinsic*. Las interacciones Tipos I–III

mantienen desempeño aceptable dentro de cada escala, pero su variabilidad es mayor, lo que sugiere que la covariación conjunta en espacio y tiempo del Tipo IV ofrece una representación más estable del riesgo.



**Figura 6.8.** Rangos relativos de DIC, WAIC y LGOCV según tipo de área, escala espacial, estructura espacial e interacción espacio-tiempo. Los segmentos representan los rangos [mín-máx] por área y los puntos indican la mediana.

Región	Área (id)	Interacción	Estructura\ espacial	DIC	WAIC	-logLik (PL)	Parsimonia (PAR)	Tiempo (min)	LGOCV	Puntaje ponderado	Ranking
Regionalizadas	2200	TypeIV	intrinsic	741.14	727.42	473.96	37.20	0.027	391.31	1.002	1
	2400	TypeIV	intrinsic	1081.29	1067.02	715.15	60.24	0.024	585.70	0.954	13
	1500	TypeIV	intrinsic	1299.59	1283.67	854.08	70.80	0.029	689.78	0.925	25
	2500	TypeIV	intrinsic	1593.75	1571.35	1063.31	85.05	0.031	859.57	0.884	37
	2100	TypeIV	BYM	1918.07	1899.18	1266.66	108.91	0.043	1026.80	0.839	49
	1900	TypeIV	intrinsic	1982.05	1969.52	1314.69	114.72	0.046	1049.97	0.830	55
	2300	TypeIV	intrinsic	2172.87	2164.87	1454.27	131.10	0.050	1152.89	0.803	73
	1700	TypeIV	intrinsic	2322.21	2302.57	1545.76	125.91	0.047	1226.18	0.785	85
	2000	TypeIV	intrinsic	2401.16	2387.57	1626.34	138.64	0.051	1275.11	0.772	94
	Barrios	TypeIV	intrinsic	2451.87	2448.13	1598.30	151.59	0.051	1288.32	0.764	103
	1800	TypeIV	intrinsic	2765.67	2745.48	1851.92	153.62	0.047	1458.56	0.723	121
	1600	TypeIV	BYM2	2806.52	2785.79	1864.31	154.34	0.054	1471.63	0.718	127
	1300	TypeIV	intrinsic	3244.02	3224.90	2185.36	184.65	0.075	1711.22	0.657	145
Elementales	2500	TypeIV	intrinsic	3699.90	3670.86	2538.59	198.13	0.107	1938.29	0.596	157
Regionalizadas	1400	TypeIV	BYM2	3723.01	3699.40	2493.32	207.57	0.091	1964.11	0.592	160
Elementales	2400	TypeIV	intrinsic	3866.59	3854.57	2635.33	221.59	0.102	2031.28	0.571	169
Regionalizadas	1000	TypeIV	intrinsic	3951.92	3954.07	2687.77	241.45	0.087	2069.00	0.557	181
Elementales	2300	TypeIV	intrinsic	4404.26	4401.06	3029.13	275.34	0.134	2323.57	0.494	205
	2200	TypeIV	intrinsic	4679.26	4677.59	3247.01	282.85	0.149	2455.94	0.457	211
Regionalizadas	1200	TypeIV	intrinsic	4779.84	4765.88	3274.35	267.08	0.129	2494.65	0.446	223
	1100	TypeIV	intrinsic	4930.40	4909.53	3369.82	263.90	0.127	2570.71	0.427	229
Elementales	2100	TypeIV	intrinsic	4960.32	4949.00	3500.33	293.27	0.212	2597.62	0.419	235
	1900	TypeIV	intrinsic	5539.83	5533.62	3860.48	314.86	0.224	2885.20	0.340	265
	2000	TypeIV	intrinsic	5526.68	5536.89	3908.27	340.52	0.208	2872.39	0.339	268
Regionalizadas	900	TypeIV	intrinsic	5780.49	5788.78	3954.22	338.12	0.179	3014.88	0.306	277
Elementales	1800	TypeIV	BYM2	6111.38	6091.81	4238.72	352.51	0.352	3181.74	0.261	298
	1700	TypeIV	intrinsic	6571.45	6591.31	4606.34	389.61	0.296	3409.41	0.195	310
	1600	TypeIV	intrinsic	7041.84	7052.63	4963.82	406.99	0.339	3642.17	0.132	325
	1500	TypeIV	intrinsic	7570.60	7571.71	5373.86	422.21	0.379	3921.27	0.061	334
	1400	TypeIV	intrinsic	8430.28	8455.10	6048.19	497.35	0.600	4356.83	-0.063	349
Regionalizadas	800	TypeIV	intrinsic	8455.44	8478.25	5925.31	490.52	0.416	4372.91	-0.063	350
Elementales	1300	TypeIV	intrinsic	9352.81	9369.58	6736.39	555.40	0.764	4849.97	-0.191	373
Regionalizadas	700	TypeIV	intrinsic	10183.60	10243.75	7282.24	607.70	0.537	5258.18	-0.305	385

Región	Área (id)	Interacción	Estructura\ espacial	DIC	WAIC	$-\log\text{Lik (PL)}$	Parsimonia (PAR)	Tiempo (min)	LGOCV	Puntaje ponderado	Ranking
Elementales	1200	TypeIV	intrinsic	10211.43	10244.86	7442.06	606.27	0.987	5273.32	-0.312	388
	1100	TypeIV	intrinsic	11628.67	11676.96	8565.35	712.14	1.309	5986.55	-0.512	409
Regionalizadas	600	TypeIV	intrinsic	12576.16	12609.84	9194.67	731.49	0.827	6439.89	-0.632	421
Elementales	1000	TypeIV	intrinsic	13072.14	13131.44	9778.08	798.27	1.678	6732.42	-0.715	427
	900	TypeIV	intrinsic	15086.83	15126.00	11461.20	879.43	2.445	7722.62	-0.993	445
Regionalizadas	500	TypeIV	intrinsic	16002.06	16067.50	12023.65	921.16	1.947	8201.80	-1.114	454
Elementales	800	TypeIV	BYM	17390.47	17456.24	13158.61	1021.80	4.422	8883.48	-1.331	469
	Barrios	TypeIV	intrinsic	19928.27	20054.55	15537.33	1164.24	3.935	10208.76	-1.678	481
	700	TypeIV	intrinsic	20421.32	20498.12	16253.84	1205.96	6.311	10424.11	-1.767	490
	600	TypeIV	intrinsic	24578.41	24675.60	20191.95	1464.83	9.157	12502.87	-2.367	505
	500	TypeIII	intrinsic	31086.81	31101.99	26108.29	2283.33	4.398	16215.78	-3.260	517

**Tabla 6.2.** Configuraciones seleccionadas según el índice multicriterio de ajuste. Incluye DIC, WAIC,  $-\log p(y | \theta)$ , parsimonia, tiempo de cómputo, LGOCV, puntaje ponderado y ranking global. Destacan las regionalizaciones con apotemas de 1 500–2 500 m y la interacción Tipo IV.

La Tabla 6.2 detalla las 44 configuraciones seleccionadas. Cada fila corresponde a una combinación específica de región, escala espacial, interacción y estructura espacial. Los modelos aparecen ordenados según el puntaje ponderado del índice multicriterio, de modo que las primeras filas concentran las configuraciones con el mejor equilibrio entre ajuste, parsimonia y costo computacional. Las regionalizaciones con apotemas de 1 500, 2 200 y 2 500 m se ubican de manera consistente en los primeros lugares, reflejando su capacidad para conciliar sensibilidad territorial y estabilidad estadística. En áreas elementales, el ajuste mejora casi de forma monótonica con el tamaño de la unidad, alcanzando valores comparables a los regionalizados sólo en las resoluciones más amplias. Finalmente, la predominancia de la interacción Tipo IV entre las configuraciones mejor clasificadas refuerza su papel como elemento clave para capturar la evolución espacio-temporal del riesgo.

La correspondencia entre la Figura 6.8 y la Tabla 6.2 confirma la coherencia interna del proceso de selección y respalda la depuración del universo original de 528 especificaciones. Estas 44 configuraciones de alto desempeño constituyen la base para la evaluación fuera de muestra presentada en la siguiente sección, donde se examina su capacidad para predecir trayectorias anuales bajo distintos escenarios espaciales.

### 6.3.3 Esquema de validación temporal con ventanas deslizantes

La capacidad predictiva de las configuraciones seleccionadas se evaluó mediante un esquema temporal de tipo *leave-group-out* con ventanas deslizantes (*rolling windows*), diseñado para reproducir condiciones prospectivas reales. Este enfoque sigue la lógica planteada por Orozco-Acosta et al. [19], quien emplea bloques históricos móviles para capturar variaciones graduales en la dinámica del riesgo y para garantizar una evaluación consistente de la capacidad de pronóstico.

En este trabajo, cada ventana comprende un bloque histórico de diez años destinado a estimación y un horizonte de tres años reservado para predicción. La Figura 6.9 resume este procedimiento y muestra explícitamente los cinco periodos muestrales utilizados: el primero abarca 2008–2017 con predicciones para 2018–2020, mientras que el último cubre 2012–2021 con predicciones para 2022–2024. El desplazamiento anual del bloque permite evaluar cada modelo bajo distintos contextos temporales, manteniendo constante la longitud del historial disponible y asegurando comparabilidad entre configuraciones estructurales.

Este diseño asegura un uso exhaustivo y no redundante de la información histórica, evitando depender de un único punto de corte entre entrenamiento y evaluación. Además, permite comparar modelos bajo condiciones equivalentes, dado que todos se someten a las mismas cinco ventanas y a los mismos horizontes de predicción (1, 2 y 3 años). El procedimiento es plenamente coherente con la formulación de la distribución predictiva descrita en la Sección 4.3.6, donde las observaciones a predecir se tratan como valores faltantes y se integran mediante las marginales a posteriori del predictor lineal.

Las métricas de error empleadas en la evaluación fuera de muestra (MAE, RMSE e *interval score*) se calcularon tanto por horizonte individual (1, 2 y 3 años) como para el conjunto agregado de los tres horizontes, de forma compatible con los escenarios espaciales definidos posteriormente (*Hotspots*, *Coldspots*, *Resto* y *Agregadoo*). Esta estructura garantiza comparabilidad

	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
k = 1	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Orange	Red	Green				
k = 2		Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Orange	Red	Green			
k = 3			Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Orange	Red	Green		
k = 4				Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Orange	Red	Green	
k = 5					Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Orange	Red	Green

**Figura 6.9.** Esquema de validación con ventanas deslizantes. Cada ventana utiliza diez años para calibración (segmentos azules) y tres para pronóstico (segmentos naranjas). Se aplicaron cinco ventanas: 2008–2017→2018–2020, 2009–2018→2019–2021, 2010–2019→2020–2022, 2011–2020→2021–2023 y 2012–2021→2022–2024.

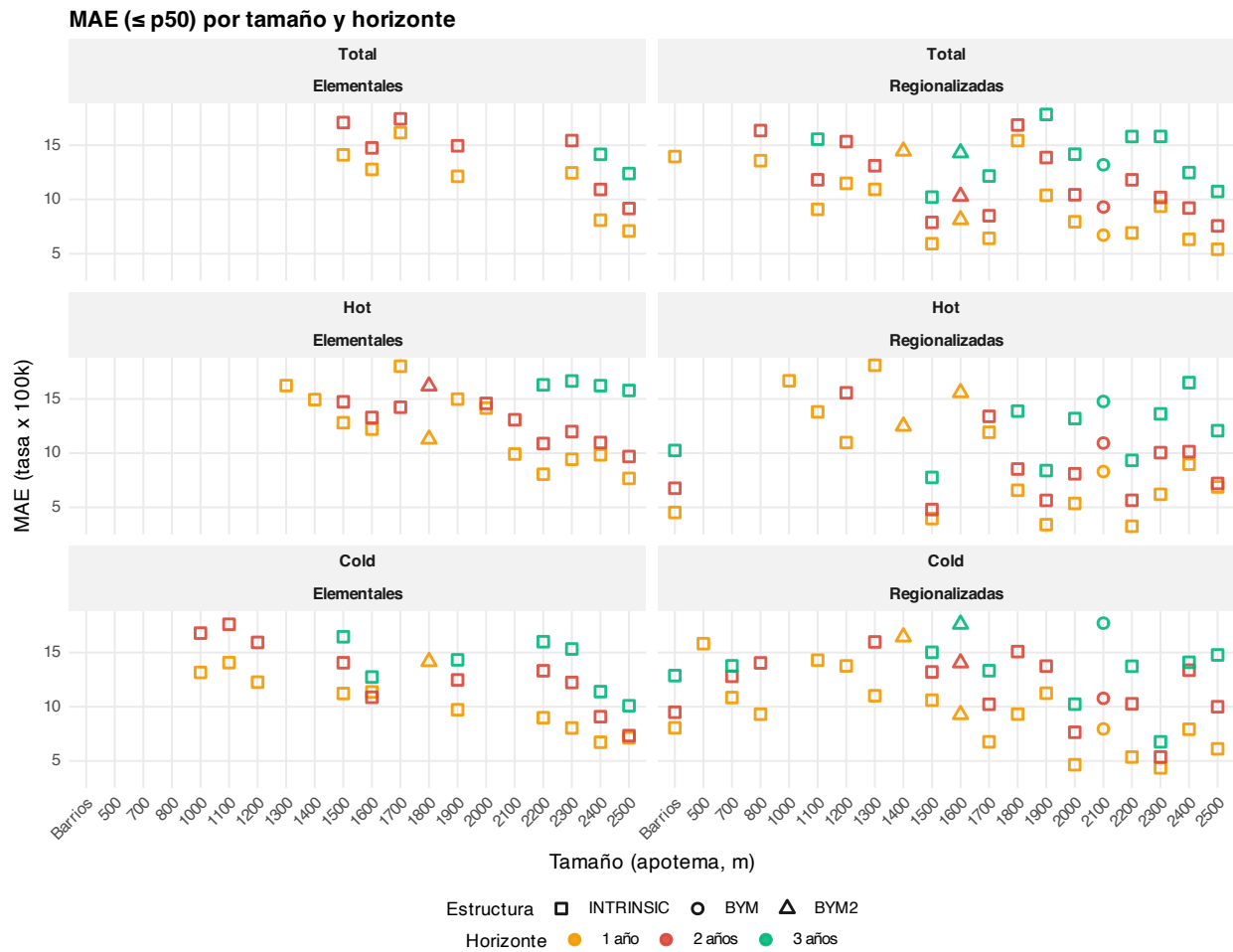
entre resoluciones y coherencia con el protocolo operativo resumido en el Anexo .1.

### 6.3.4 Evaluación predictiva por escenarios espaciales

El desempeño fuera de muestra de las 44 configuraciones seleccionadas se evaluó en cuatro escenarios espaciales: *Hotspots*, *Coldspots*, *Resto* y *Agregado*. Esta clasificación, construida a partir de las participaciones medias de homicidios por área (Anexo .1.3), permite distinguir zonas de alta concentración, baja incidencia y comportamiento intermedio, manteniendo comparabilidad entre resoluciones espaciales. La evaluación se realizó sobre tasas por 100 000 habitantes e incorporó dos dimensiones: la precisión puntual mediante el error absoluto medio (MAE), y la calibración de la incertidumbre mediante el *interval score* (IS) al 95 %. Ambas métricas se calcularon para los tres horizontes de predicción generados por el esquema de ventanas deslizantes previamente descrito.

La Figura 6.10 resume la relación entre el tamaño de la unidad espacial y el error predictivo (MAE), concentrándose en las configuraciones con valores inferiores a la mediana global. En el eje horizontal se representa el apotema de la malla; en el eje vertical, el MAE. Cada punto corresponde a una combinación específica de estructura espacial y horizonte de predicción; las formas identifican las estructuras ICAR, BYM y BYM2, mientras que los colores distinguen los horizontes de 1, 2 y 3 años. Los paneles separan tanto los escenarios espaciales como los tipos de área (elementales y regionalizadas).

Los resultados combinados de la figura y de la Tabla 6.4 muestran un patrón claro y coherente. En las áreas elementales, los errores más altos se concentran en las resoluciones pequeñas, especialmente entre 600 y 1 400 metros, donde el MAE permanece elevado en todos los horizontes y escenarios. Esta tendencia coincide con la ausencia de estas resoluciones en las primeras posiciones del ranking: ninguna aparece entre los veinte mejores modelos. En cambio, las áreas elementales que sí se ubican en posiciones competitivas corresponden a apotemas relativamente grandes, entre 1 900 y 2 500 metros, lo que indica que las exposiciones pequeñas propias de las celdas finas dificultan la estabilidad predictiva.



**Figura 6.10.** Desempeño predictivo por escenario espacial. Relación entre tamaño de malla y MAE en distintas estructuras espaciales y horizontes de predicción (1–3 años).

El comportamiento de las regionalizaciones es más homogéneo y favorable. Entre 1 100 y 2 500 metros, los valores de MAE observados en la Figura 6.10 se concentran en niveles bajos y relativamente cercanos entre sí, sin la dispersión pronunciada que caracteriza a las áreas elementales pequeñas. La comparación con la Tabla 6.4 confirma este patrón: las primeras posiciones del ranking corresponden casi exclusivamente a regionalizaciones con apotemas de 1 500, 2 200 y 2 500 metros, que registran los MAE, RMSE e IS más reducidos incluso a tres años de horizonte. Estos resultados muestran que la escala espacial es un determinante central del desempeño predictivo: mientras las áreas elementales pequeñas presentan errores altos y muy sensibles al tamaño de la celda, las regionalizaciones intermedias combinan precisión, estabilidad y sensibilidad territorial de manera consistente.

La variación por horizonte de predicción ofrece un patrón igualmente estable. El primer año presenta siempre los valores más bajos de error y constituye el horizonte más confiable. El segundo año experimenta un deterioro moderado, pero la diferencia entre el primer y segundo año tiende a ser relativamente estrecha en la mayoría de configuraciones bien desempeñadas. La mayor divergencia ocurre entre el segundo y tercer año, donde el error aumenta de manera más pronunciada; esta separación se observa de forma sistemática tanto en el gráfico como en

la Tabla 6.4. Aun así, las regionalizaciones con apotemas entre 1 500 y 2 500 metros conservan un desempeño relativamente sólido incluso a tres años, mientras que las áreas elementales sólo alcanzan niveles comparables cuando operan en resoluciones amplias.

Rank	Espacial	Tipo de área	Tamaño	Escenario	1y	2y	3y	1y	2y	3y	1y	2y	3y
					MAE			RMSE			IS		
					MAE_1	MAE_2	MAE_3	RMSE_1	RMSE_2	RMSE_3	IS_1	IS_2	IS_3
1	INTRINSIC	Regionalizadas	1500	Total Área	5.92	7.89	10.22	8.20	10.65	13.42	38.77	52.82	67.31
	INTRINSIC	Regionalizadas	1500	Hotspot	3.96	4.80	7.76	4.21	5.87	8.90	38.00	56.20	69.35
	INTRINSIC	Regionalizadas	1500	Coldspot	10.61	13.21	15.03	13.44	17.30	19.22	49.73	69.67	87.31
2	INTRINSIC	Regionalizadas	2200	Total Área	6.92	11.81	15.80	11.80	18.81	23.56	53.57	75.41	98.16
	INTRINSIC	Regionalizadas	2200	Hotspot	3.26	5.65	9.33	5.42	7.98	10.48	32.36	36.77	47.31
	INTRINSIC	Regionalizadas	2200	Coldspot	5.36	10.28	13.74	6.21	11.69	15.01	35.72	49.40	66.22
3	INTRINSIC	Regionalizadas	2500	Total Área	5.40	7.56	10.74	7.03	10.09	12.91	39.59	54.60	66.52
	INTRINSIC	Regionalizadas	2500	Hotspot	6.88	7.21	12.07	7.55	9.59	13.96	63.74	94.80	125.53
	INTRINSIC	Regionalizadas	2500	Coldspot	6.12	10.00	14.78	8.63	13.10	16.11	53.59	72.14	69.15
4	INTRINSIC	Regionalizadas	1900	Total Área	10.39	13.87	17.84	17.53	21.23	27.66	85.53	113.51	146.04
	INTRINSIC	Regionalizadas	1900	Hotspot	3.73	6.95	10.37	6.53	8.97	12.00	50.38	46.20	52.73
	INTRINSIC	Regionalizadas	1900	Coldspot	11.25	13.75	18.95	13.54	16.40	22.88	62.36	75.71	100.01
5	INTRINSIC	Regionalizadas	2400	Total Área	6.32	9.21	12.48	8.47	12.17	15.34	43.75	62.79	77.27
	INTRINSIC	Regionalizadas	2400	Hotspot	8.98	10.14	16.50	9.96	13.85	18.69	73.16	109.30	146.89
	INTRINSIC	Regionalizadas	2400	Coldspot	7.93	13.38	14.10	9.39	15.13	17.92	45.16	72.93	69.34
6	BYM	Regionalizadas	2100	Total Área	6.71	9.30	13.20	9.25	12.39	16.81	52.06	71.14	88.70
	BYM	Regionalizadas	2100	Hotspot	9.76	11.04	16.58	10.66	14.41	19.10	75.79	109.91	142.84
	BYM	Regionalizadas	2100	Coldspot	7.96	10.78	17.71	10.60	13.29	21.39	58.97	83.67	109.86
7	INTRINSIC	Regionalizadas	Barrios	Total Área	13.96	18.37	27.91	27.80	35.27	59.41	144.32	201.18	265.90
	INTRINSIC	Regionalizadas	Barrios	Hotspot	3.22	5.69	8.85	4.05	6.86	9.54	24.77	37.37	49.97
	INTRINSIC	Regionalizadas	Barrios	Coldspot	8.06	9.50	12.88	10.56	11.47	15.77	51.30	69.30	88.60
8	INTRINSIC	Elementales	2500	Total Área	7.10	9.17	12.39	9.69	12.67	16.29	47.00	65.25	81.65
	INTRINSIC	Elementales	2500	Hotspot	9.78	10.98	18.18	14.39	19.08	27.43	91.76	135.68	171.71
	INTRINSIC	Elementales	2500	Coldspot	7.14	7.34	10.09	8.19	8.52	11.78	22.20	26.28	30.33
9	INTRINSIC	Regionalizadas	2000	Total Área	7.94	10.44	14.17	11.85	14.01	18.74	56.27	74.39	93.99
	INTRINSIC	Regionalizadas	2000	Hotspot	8.50	14.33	22.38	11.06	18.24	26.54	118.05	172.30	228.63
	INTRINSIC	Regionalizadas	2000	Coldspot	4.65	7.65	10.24	6.40	9.24	12.12	29.54	38.27	52.33
10	INTRINSIC	Elementales	1900	Total Área	12.14	14.95	19.59	21.67	24.49	31.87	82.36	111.59	141.62
	INTRINSIC	Elementales	1900	Hotspot	8.96	11.86	19.70	12.83	18.41	28.40	100.63	145.37	185.14
	INTRINSIC	Elementales	1900	Coldspot	9.73	12.48	14.33	15.62	20.36	24.06	56.70	72.66	89.61
11	INTRINSIC	Elementales	2400	Total Área	8.09	10.92	14.16	11.70	15.65	19.19	54.20	74.26	98.12
	INTRINSIC	Elementales	2400	Hotspot	15.87	15.94	23.70	22.68	28.29	33.97	100.86	144.84	188.55
	INTRINSIC	Elementales	2400	Coldspot	6.73	9.09	11.40	9.09	11.31	13.83	56.07	60.78	89.69
12	INTRINSIC	Regionalizadas	2300	Total Área	9.38	10.19	15.81	17.98	18.30	26.03	63.51	89.22	119.69
	INTRINSIC	Regionalizadas	2300	Hotspot	10.31	17.89	23.85	13.47	22.10	28.36	100.00	148.81	192.75
	INTRINSIC	Regionalizadas	2300	Coldspot	4.36	5.37	6.77	5.49	6.72	7.88	29.78	36.16	33.27

Rank	Espacial	Tipo de área	Tamaño	Escenario	MAE_1	MAE_2	MAE_3	RMSE_1	RMSE_2	RMSE_3	IS_1	IS_2	IS_3
13	BYM2	Regionalizadas	1600	Total Área	8.13	10.30	14.30	11.75	14.82	19.03	51.96	74.99	95.17
	BYM2	Regionalizadas	1600	Hotspot	11.32	15.08	23.29	12.49	18.58	27.47	114.70	167.04	221.32
	BYM2	Regionalizadas	1600	Coldspot	9.28	14.05	17.62	11.91	16.70	20.18	55.48	76.65	92.75
14	INTRINSIC	Regionalizadas	1800	Total Área	15.43	16.87	21.95	45.07	37.67	47.96	94.53	124.89	160.47
	INTRINSIC	Regionalizadas	1800	Hotspot	9.92	12.71	21.11	11.33	16.82	24.21	89.97	129.48	170.70
	INTRINSIC	Regionalizadas	1800	Coldspot	9.32	15.09	20.04	10.17	16.61	22.26	51.74	68.99	99.94
15	INTRINSIC	Regionalizadas	1700	Total Área	6.42	8.50	12.16	8.70	11.41	15.47	48.55	67.44	85.62
	INTRINSIC	Regionalizadas	1700	Hotspot	14.93	14.47	26.32	15.94	19.65	29.17	148.69	208.20	261.85
	INTRINSIC	Regionalizadas	1700	Coldspot	6.77	10.23	13.33	8.27	12.05	15.20	49.16	55.39	64.16
16	INTRINSIC	Elementales	2200	Total Área	22.11	25.26	26.67	86.67	88.56	74.21	105.28	157.01	168.21
	INTRINSIC	Elementales	2200	Hotspot	11.29	15.49	23.01	16.85	23.81	34.02	107.99	159.30	208.42
	INTRINSIC	Elementales	2200	Coldspot	8.99	13.32	16.00	13.12	18.80	22.24	47.48	79.37	95.64
17	INTRINSIC	Elementales	2300	Total Área	12.46	15.43	20.41	22.20	24.11	31.72	83.47	122.18	161.04
	INTRINSIC	Elementales	2300	Hotspot	16.47	20.11	26.87	22.63	26.85	34.02	128.99	183.74	240.36
	INTRINSIC	Elementales	2300	Coldspot	8.04	12.24	15.33	11.85	17.27	21.22	51.53	76.15	99.70
18	INTRINSIC	Elementales	1600	Total Área	12.77	14.76	18.92	21.05	23.67	29.73	80.29	109.10	139.87
	INTRINSIC	Elementales	1600	Hotspot	17.38	18.78	29.24	26.70	35.92	46.89	152.45	215.46	276.68
	INTRINSIC	Elementales	1600	Coldspot	11.37	10.88	12.75	19.50	16.07	17.97	40.79	50.81	62.75
19	INTRINSIC	Regionalizadas	1300	Total Área	10.93	13.11	19.60	18.59	22.55	31.96	78.24	109.96	142.70
	INTRINSIC	Regionalizadas	1300	Hotspot	22.28	24.06	35.02	29.84	37.68	48.44	137.95	200.96	257.11
	INTRINSIC	Regionalizadas	1300	Coldspot	11.02	15.98	28.90	15.62	21.95	35.18	101.85	144.83	194.05
20	BYM2	Regionalizadas	1400	Total Área	14.46	21.89	25.47	44.06	70.83	65.19	100.44	134.65	170.06
	BYM2	Regionalizadas	1400	Hotspot	17.16	25.26	33.41	22.20	32.20	40.98	149.29	210.83	277.66
	BYM2	Regionalizadas	1400	Coldspot	16.45	24.99	31.71	21.35	30.05	37.87	95.30	132.55	155.34

**Tabla 6.4.** Veinte configuraciones con mejor desempeño predictivo integrado según el índice  $S(\theta)$ . Se reportan MAE, RMSE e IS para horizontes de 1–3 años.

En conjunto, la evidencia indica que la capacidad predictiva mejora sustancialmente al aumentar la escala espacial, que la estabilidad es mayor en las regionalizaciones intermedias y que la pérdida de precisión a lo largo del horizonte es moderada entre el primer y segundo año, pero más pronunciada entre el segundo y el tercero. Las regionalizaciones entre 1 500 y 2 500 metros constituyen, de manera consistente, el soporte más eficaz para la predicción espacio-temporal de los homicidios en Medellín.

### 6.3.5 Índice predictivo compuesto y selección final de modelos

El ranking resultante dado por el índice predictivo compuesto  $S(\theta)$  definido en el Anexo .1, tal como lo muestra en la Tabla 6.4 permite integrar el desempeño de cada configuración en los distintos escenarios espaciales y horizontes temporales. Además, identifica los modelos con mayor consistencia global entre precisión puntual y calibración de la incertidumbre, sintetizando la información proveniente de MAE e IS de manera estandarizada y comparable entre escalas.

Los resultados muestran patrones claros. En primer lugar, las regionalizaciones con apotemas intermedios —especialmente 1 500, 2 200 y 2 500 m— concentran las mejores puntuaciones del índice. Estas configuraciones logran simultáneamente bajos errores en *Total Área* y *Hotspots*, y mantienen una incertidumbre acotada incluso a tres años vista. Su desempeño robusto confirma que las unidades contiguas de tamaño medio equilibran adecuadamente sensibilidad territorial y estabilidad estadística.

En segundo lugar, los escenarios espaciales exhiben diferencias sistemáticas. Los *Hotspots* son, en promedio, presentan los valores más bajos de MAE e IS debido a su mayor volumen de eventos. Los *Coldspots*, por el contrario, tienden a concentrar los errores más altos en todos los horizontes, reflejando la dificultad inherente de anticipar conteos muy bajos e irregulares. Los escenarios *Resto* y *Agregado* se ubican en posiciones intermedias y actúan como referencia del comportamiento agregado del sistema de modelos.

En tercer lugar, aunque las regionalizaciones dominan los primeros lugares del ranking, varias configuraciones elementales de gran tamaño (entre 1 900 y 2 500 m) se incorporan también en el grupo superior. Esto indica que las mallas detalladas pueden alcanzar niveles de precisión comparables cuando la unidad espacial es lo suficientemente grande como para estabilizar las tasas, preservando al mismo tiempo la capacidad de capturar variaciones microterritoriales.

Es así como el índice predictivo compuesto permite distinguir con claridad las configuraciones que mantienen un equilibrio estable entre ajuste interno y capacidad de pronóstico. Los modelos mejor posicionados combinan: (i) escala espacial intermedia o elemental amplia, (ii) interacción espacio-temporal Tipo IV y (iii) estructuras espaciales dominadas por la variante *ICAR*. Estas configuraciones sirven como base para las proyecciones espacio-temporales presentadas en la sección siguiente.

### 6.3.6 Proyecciones espacio-temporales de los modelos seleccionados

Las proyecciones espacio-temporales se basan en las tres configuraciones regionalizadas que obtuvieron el mejor desempeño predictivo en el análisis comparativo: apotemas de 1 500,

**Tabla 6.5.** Cobertura del intervalo de credibilidad del 95 % y sesgo direccional de la mediana posterior por grupo espacial y horizonte de pronóstico.

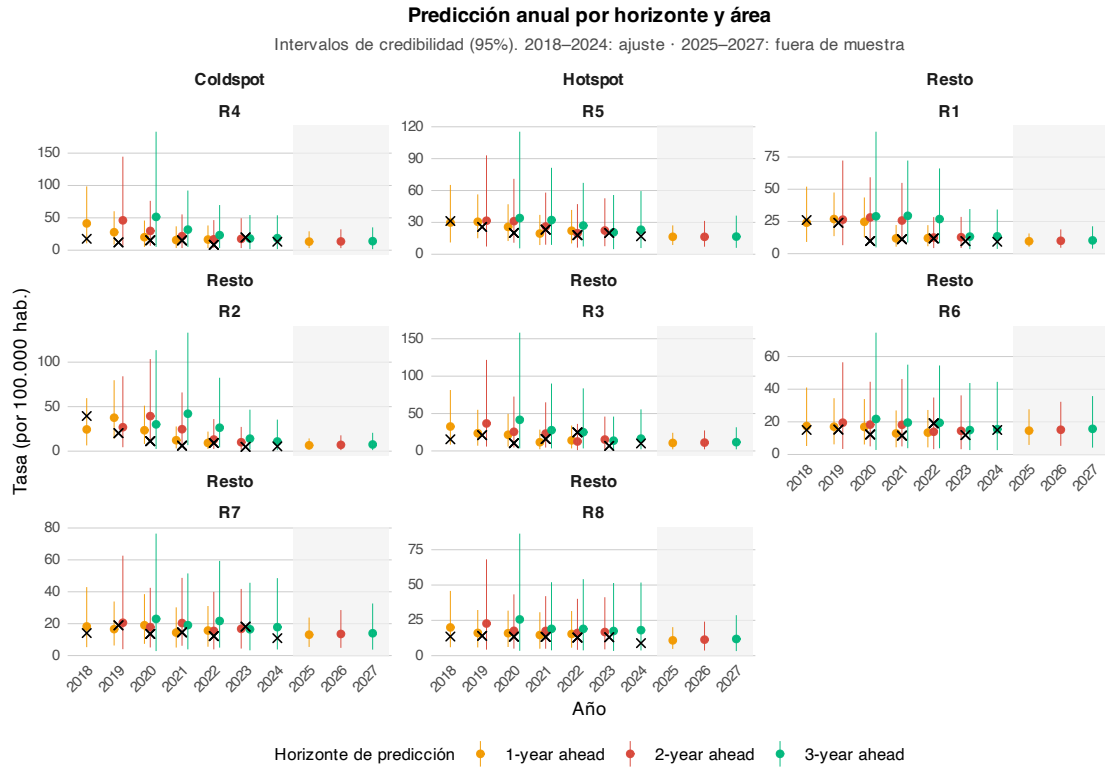
Grupo	Horizonte	Sesgo direccional (%)	Cobertura (95 %)
Coldspot	1-year ahead	86.7	1.00
Coldspot	2-year ahead	80.0	1.00
Coldspot	3-year ahead	93.3	1.00
Hotspot	1-year ahead	66.7	1.00
Hotspot	2-year ahead	100.0	1.00
Hotspot	3-year ahead	100.0	1.00
Resto	1-year ahead	71.4	1.00
Resto	2-year ahead	88.3	1.00
Resto	3-year ahead	93.9	1.00

2 200 y 2 500 metros. Estas resoluciones encabezaron el ranking multicriterio al presentar, de manera consistente, los valores más bajos de MAE y RMSE y la menor divergencia entre las distribuciones posteriores y las observaciones (IS) en los escenarios *Total Área*, *Hotspot* y *Coldspot*. Su selección garantiza que los resultados aquí expuestos correspondan a los modelos más estables y confiables para evaluar la evolución del riesgo homicida.

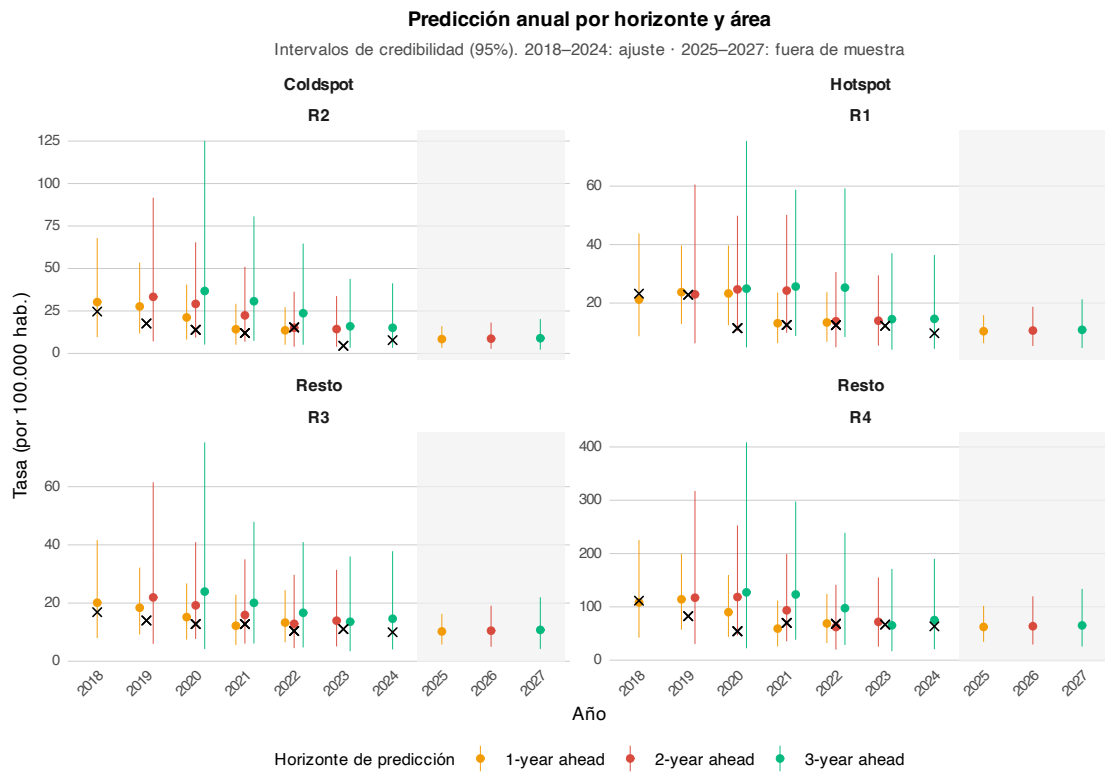
La Figura 6.11 resume el desempeño predictivo de estas regionalizaciones mediante gráficos de puntos e intervalos de credibilidad al 95 %. Cada faceta combina un área con un tipo de zona (*Hotspot*, *Coldspot* y *Resto*), permitiendo examinar simultáneamente variaciones espaciales y temporales. Los puntos de color reflejan la mediana posterior para cada horizonte (1, 2 y 3 años), las barras verticales representan los intervalos de credibilidad, y las “X” negras indican los valores observados. El sombreado gris destaca el periodo fuera de muestra (2025–2027), donde las trayectorias proyectadas mantienen coherencia con las tendencias históricas y muestran una propagación razonable de la incertidumbre. En conjunto, la figura revela un comportamiento predictivo estable y consistente entre las tres escalas espaciales analizadas.

Las estimaciones resultan congruentes con las tasas observadas en 2018–2024 y presentan una calibración adecuada en los tres horizontes evaluados (Figuras 6.11 y 6.12). El tamaño de celda influye en la expresión visual del riesgo: resoluciones de 1 500 y 2 200 m preservan mayor diferenciación local, mientras que 2 500 m produce superficies más suaves y estables, sin eliminar *hotspots* persistentes en sectores centrales y nororientales. Las bandas de incertidumbre tienden a ampliarse en áreas periféricas y con menor exposición, lo que refleja apropiadamente la variación en la información disponible. Asimismo, las regionalizaciones intermedias (1 900–2 000 m) exhiben métricas cercanas a las óptimas, lo cual indica que una mayor desagregación espacial no deteriora la coherencia predictiva y puede mejorar la sensibilidad en zonas de transición.

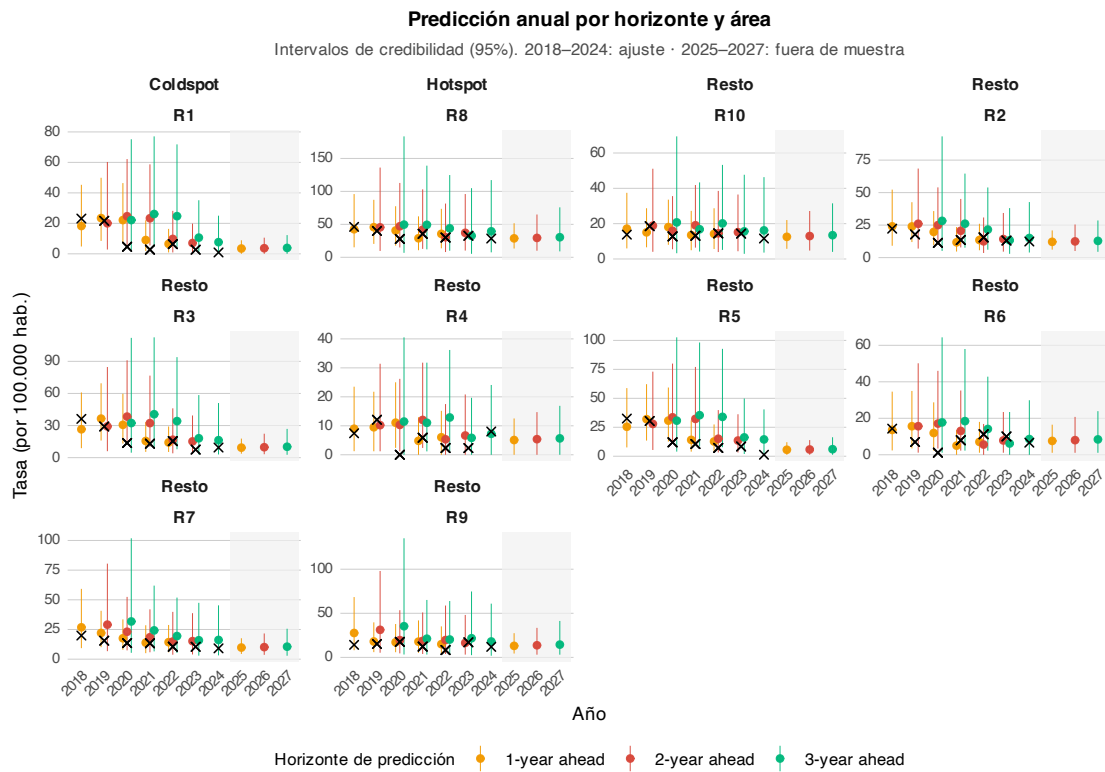
Los resultados de la Tabla 6.5 profundizan la interpretación de los gráficos y permiten evaluar dos dimensiones esenciales del desempeño predictivo: la calibración de los intervalos de credibilidad y la dirección sistemática del sesgo. La cobertura del 95 % alcanza el valor máximo (1.00) en todos los grupos espaciales y horizontes de pronóstico, lo cual indica que los intervalos



(a) Regionalización de 1 500 m



(b) Regionalización de 2 200 m



(c) Regionalización de 2500 m

**Figura 6.11.** Tasas observadas y proyectadas por horizonte (1, 2 y 3 años) en la regionalización seleccionada de 2500 m.

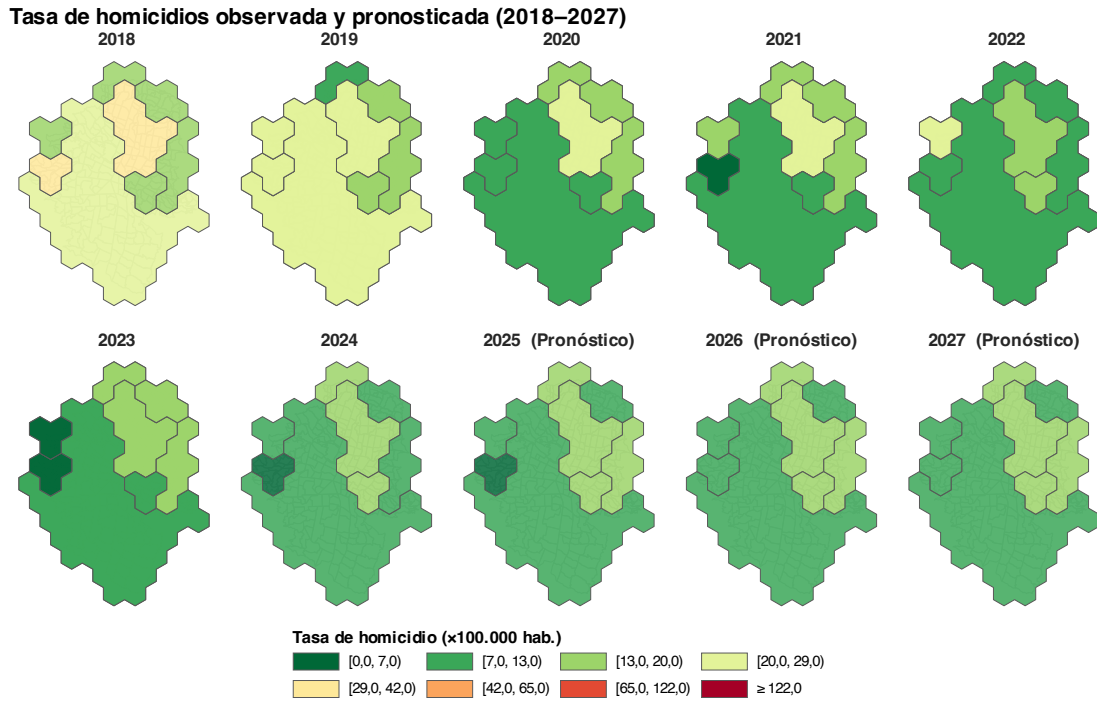
posteriores encapsulan consistentemente los valores observados y que la incertidumbre del modelo está correctamente cuantificada. Esta estabilidad en la cobertura es coherente con el comportamiento esperado de los modelos jerárquicos basados en campos gaussianos latentes, donde la estructura espacio-temporal amortigua la variabilidad inherente a conteos raros y distribuciones altamente dispersas.

Al examinar el sesgo direccional emerge un patrón coherente con la teoría de suavizamiento espacial en modelos ICAR y BYM: las predicciones tienden a situarse por encima de los valores observados en todos los grupos, aunque con magnitudes diferenciadas según el nivel de exposición. En los *hotspots*, donde los conteos son altos y muestran una fuerte estabilidad temporal, la distancia entre la predicción media y el valor real es reducida, lo que sugiere que las dependencias espaciales y la inercia temporal capturan adecuadamente la persistencia local del riesgo. En contraste, los *coldspots* registran las brechas más amplias, resultado consistente con el mecanismo de “préstamo de fuerza” descrito en la literatura clásica Besag, York y Mollié [35], mediante el cual las áreas de baja incidencia absorben información de sus vecinas con conteos mayores. Esta regularización empuja las predicciones ligeramente por encima del mínimo observado para evitar estimaciones inestables cercanas a cero. El grupo *Resto* exhibe un comportamiento intermedio, reflejando niveles moderados de exposición en los que el suavizamiento espacial contribuye a estabilizar la señal, pero sin generar los sesgos relativos elevados que aparecen en los *coldspots*.

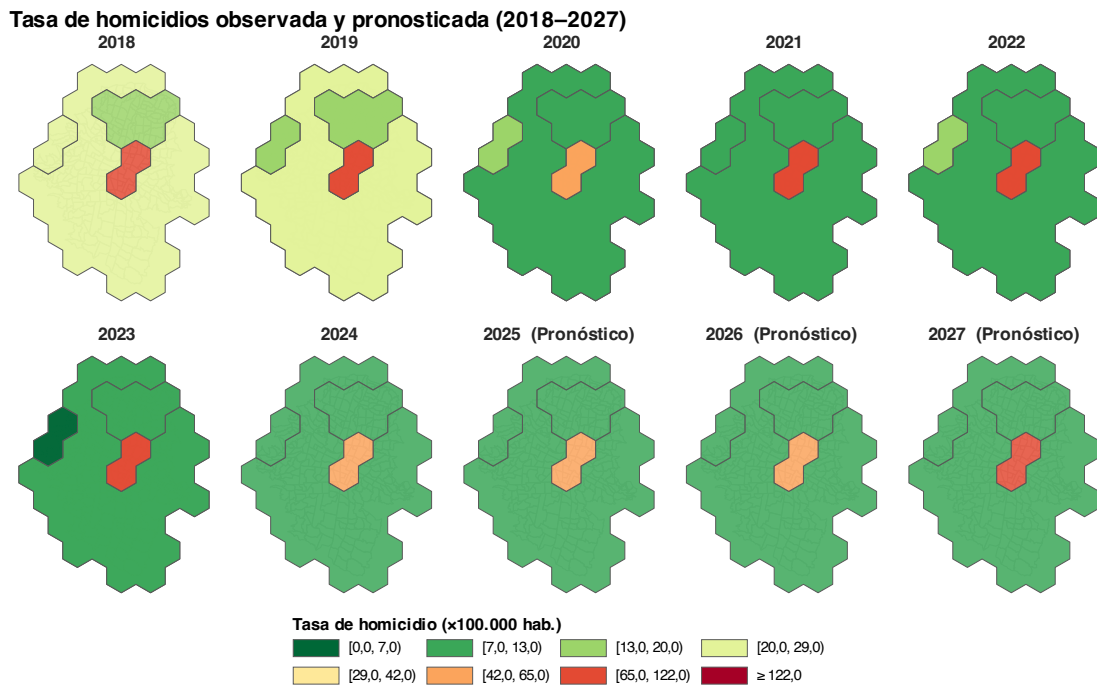
Por otra parte, la inspección de los mapas en de la Figura 6.12 revela con claridad los efectos del problema de la unidad espacial modificable (MAUP). Como señala la literatura clásica [13, 14], la variación en el tamaño de las unidades modifica la apariencia visual del riesgo y altera la granularidad de los patrones locales. En la resolución de 1 500 m se observa mayor variabilidad microterritorial y la aparición de focos puntuales de alta intensidad, mientras que en las escalas de 2 200 y 2 500 m estos contrastes se suavizan al agregarse áreas contiguas. No obstante, la estructura espacial del riesgo permanece notablemente estable: en los tres casos se mantiene un gradiente persistente de mayor riesgo en la franja norte y centro-norte, tanto en el periodo observado (2018–2024) como en el prospectivo (2025–2027). La coherencia multiescala de estos patrones indica que las diferencias entre mapas responden principalmente a efectos de agregación y no a inestabilidad del modelo.

De manera complementaria, los mapas corroboran un conjunto adicional de regularidades. En primer lugar, la persistencia de los focos de mayor riesgo en el sector norte coincide con la evidencia sobre la estabilidad de los *hotspots* urbanos [6, 22]. En segundo lugar, las unidades espaciales más finas muestran mayor sensibilidad a fluctuaciones locales, mientras que las más amplias permiten captar gradientes regionales y tendencias de segundo orden. Esta complementariedad multiescala evidencia que los modelos reproducen tanto patrones locales consistentes como procesos socioespaciales más amplios que persisten en el tiempo. Finalmente, la continuidad entre las tasas observadas y los valores proyectados, sin aparición de focos atípicos o artefactos espaciales, constituye un indicador adicional de estabilidad estructural y de que las proyecciones reflejan evoluciones plausibles del riesgo, antes que extrapolaciones sensibles al tamaño de la unidad de análisis.

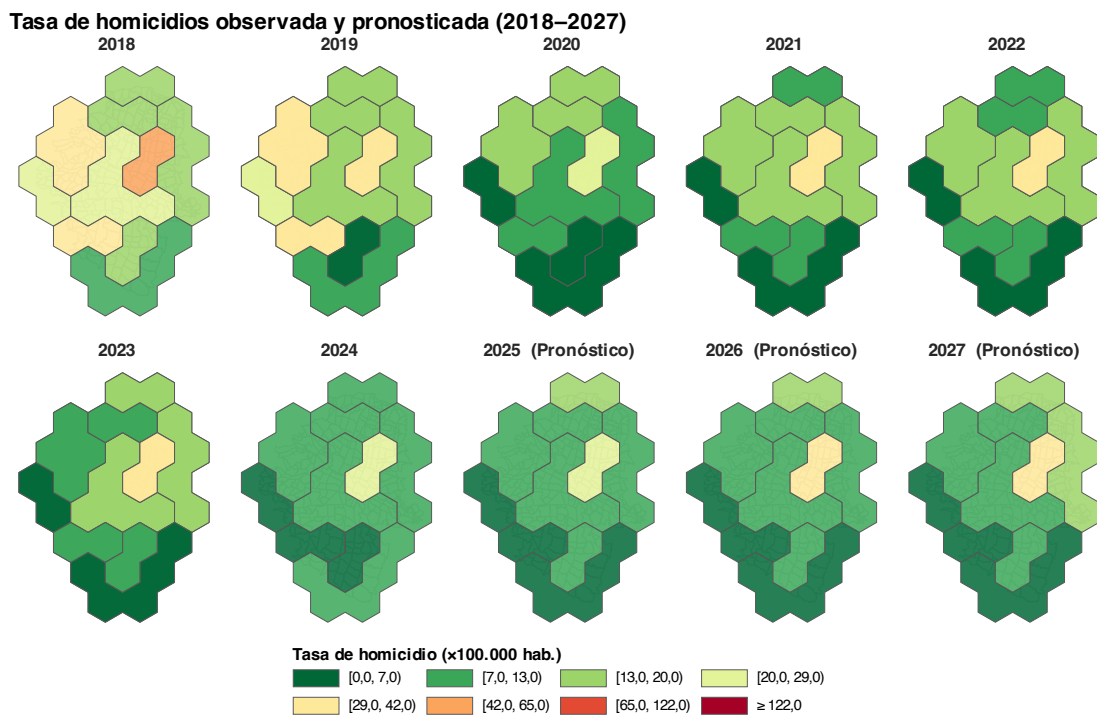
Finalmete, los resultados presentados en esta subsección demuestran que las regionalizaciones con apotemas de 1 500, 2 200 y 2 500 metros no solo ofrecen el mejor desempeño predictivo según



(a) Apotema 1 500 m



(b) Apotema 2 200 m



(c) Apotema 2 500 m

**Figura 6.12.** Proyecciones de la tasa de homicidios por 100 000 habitantes (2025–2027) para las tres regionalizaciones seleccionadas.

los criterios comparativos, sino que también capturan de manera robusta la estructura espacio-temporal del riesgo homicida en Medellín. La coherencia entre las trayectorias observadas y proyectadas, la estabilidad multiescala del patrón territorial y la adecuada calibración de la incertidumbre proporcionan una base sólida para interpretar las dinámicas futuras del fenómeno y para sustentar ejercicios de monitoreo territorial y planificación preventiva. Estos hallazgos permiten avanzar hacia una discusión más amplia sobre las implicaciones sustantivas de las proyecciones, las limitaciones inherentes al MAUP y el potencial de las regionalizaciones óptimas para apoyar decisiones estratégicas orientadas a la reducción y focalización del riesgo.



# Capítulo 7

## Discusión

El análisis desarrollado en esta tesis permite comprender con mayor precisión la estructura espacio-temporal del homicidio en Medellín y ofrece una lectura integrada del fenómeno a partir de tres dimensiones convergentes: la influencia de la escala espacial, la relevancia de la dinámica espacio-temporal y la estabilidad de los patrones territoriales frente a perturbaciones externas. Los resultados muestran que la violencia letal no se distribuye aleatoriamente, sino que responde a una combinación de persistencia local, dependencia entre microterritorios y regularidades temporales que se mantienen incluso en periodos de oscilación sustancial de las tasas agregadas.

Un primer hallazgo decisivo es el papel estructural de la escala espacial en la calidad del ajuste y en la coherencia predictiva. Las regionalizaciones contiguas derivadas de mallas hexagonales entre 1 500 y 2 500 metros ofrecen el mejor equilibrio entre granularidad territorial y estabilidad inferencial, en consonancia con la literatura sobre el problema de la unidad espacial modificable. A estas escalas intermedias, el fenómeno se expresa con suficiente detalle para identificar focos de riesgo persistentes sin que la varianza inherente al conteo de eventos raros distorsione la señal. La convergencia de las métricas a partir de los 2 200 metros sugiere un punto de estabilidad en el que la geografía del riesgo se representa de manera fiel, evitando tanto la fragmentación excesiva como la dilución de patrones sustantivos por agregaciones demasiado amplias.

En la dimensión temporal, los resultados evidencian una marcada inercia. Las áreas con niveles altos o bajos de riesgo tienden a conservar su posición relativa, y los cambios suelen producirse gradualmente. Dentro de este contexto, la interacción espacio-temporal Tipo IV emergió como la estructura más adecuada entre las evaluadas, al capturar simultáneamente la continuidad temporal y la dependencia espacial. Esta estructura no sólo suaviza la evolución entre periodos adyacentes, sino que también incorpora la influencia de los microterritorios vecinos, reproduciendo con notable fidelidad la dinámica de difusión de corto alcance documentada por la criminología del lugar.

El comportamiento del modelo ICAR con interacción Tipo IV permite extraer inferencias adicionales sobre el proceso generador del riesgo. El componente ICAR refleja que las tasas de homicidio presentan un suavizamiento por vecindad: microterritorios contiguos comparten

niveles de riesgo semejantes y la información se transfiere entre ellos, estabilizando las estimaciones en áreas con conteos bajos. La estructura Tipo IV, por su parte, indica que las desviaciones locales respecto a la tendencia general evolucionan de modo gradual tanto en el espacio como en el tiempo. Esta combinación revela que el fenómeno no está dominado por ruido idiosincrático ni por fluctuaciones abruptas, sino por una continuidad espaciotemporal que se expresa mediante persistencia local e influencias vecinales. El hecho de que ICAR supere a BYM y BYM2 sugiere que la variabilidad no estructurada es relativamente limitada; la mayor parte de la dinámica se explica por patrones espaciales latentes y por memorias temporales de corto plazo.

La evaluación de la calibración confirmó que los modelos seleccionados reproducen de manera adecuada tanto la estructura histórica como las trayectorias proyectadas. Los intervalos de credibilidad contienen sistemáticamente los valores observados en horizontes de uno y dos años, y sólo se amplían de forma natural en pronósticos a tres años. Este comportamiento demuestra que la propagación de la incertidumbre es gradual y coherente, un atributo deseable en ejercicios de predicción territorial. La similitud de resultados entre regionalizaciones y celdas elementales a partir de ciertas escalas refuerza la idea de que el proceso subyacente posee regularidades internas suficientemente fuertes para expresarse de manera estable independientemente de la unidad de análisis, siempre dentro de rangos conceptualmente razonables.

Si bien este ejercicio no se presentó formalmente en los resultados principales, un análisis adicional con ventanas deslizantes permite profundizar en la respuesta del modelo frente a episodios no estacionarios, en particular al año 2020, periodo marcado por las restricciones de movilidad y los cambios abruptos en la actividad urbana derivados de la pandemia de COVID-19. Al excluir dicho año, los errores predictivos se reducen de manera consistente, lo que confirma el carácter disruptivo de este evento y su capacidad de alterar temporalmente la estructura regular del riesgo homicida. Más revelador aún es que las regionalizaciones recuperan estabilidad con mayor rapidez, mientras que las unidades elementales exhiben oscilaciones más pronunciadas. Este comportamiento es coherente con la dificultad previamente señalada de predecir niveles muy bajos de incidencia: en los *coldspots*, incluso variaciones pequeñas producen desviaciones relativas elevadas, amplificando los sesgos de predicción. La agregación espacial, en contraste, actúa como un mecanismo de amortiguación que preserva la coherencia del patrón latente aun bajo perturbaciones abruptas, reforzando su pertinencia para ejercicios de monitoreo predictivo en contextos volátiles y estructuralmente inestables.

Las propiedades identificadas tienen implicaciones directas para la política pública. La evidencia muestra que los *hotspots* no son puntos aislados, sino zonas de influencia que se reconfiguran lentamente. La contigüidad espacial y la memoria temporal deben ser elementos centrales en el diseño de intervenciones: las acciones aisladas o de corta duración tienden a perder efectividad, mientras que las intervenciones sostenidas y coordinadas entre microterritorios cercanos son más consistentes con la dinámica real del riesgo. Además, el hecho de que la mediana posterior sobrestime de manera moderada los valores observados en áreas de alta incidencia puede aprovecharse para la prevención: en contextos críticos, es prudente sobredimensionar la intervención, reconociendo la asimetría de los costos entre subactuar y sobreactuar.

Finalmente, los resultados abren un conjunto de líneas de investigación que amplían el alcance

metodológico de esta tesis. La integración de fuentes dinámicas, como movilidad humana o luminancia nocturna, podría refinar los límites funcionales de las unidades de análisis sin introducir incertidumbres innecesarias en la etapa predictiva. Asimismo, la evidencia de que parte del homicidio sigue patrones asociados a la infraestructura vial sugiere que la modelación en redes urbanas ofrece una vía prometedora para representar con mayor precisión la geometría operativa del fenómeno. Ambas direcciones convergen hacia un marco más amplio, que integra modelación bayesiana, datos dinámicos y representación espacial avanzada para comprender fenómenos urbanos complejos.

De esta forma, la evidencia indica que el riesgo homicida en Medellín se explica y se anticipa mejor cuando se modelan conjuntamente la dependencia espacial entre áreas vecinas y la inercia temporal de cada microterritorio. Las escalas intermedias, la estructura ICAR y la interacción Tipo IV conforman un marco sólido, capaz de capturar desviaciones locales que persisten y se propagan suavemente en el espacio y en el tiempo. Este enfoque no solo profundiza la comprensión de la dinámica territorial del homicidio, sino que también sienta bases metodológicas para sistemas adaptativos de monitoreo urbano que integran datos multifuente y enfoques multiescala en el análisis de fenómenos urbanos complejos.



# Capítulo 8

## Conclusiones

Esta tesis demuestra que la integración de modelos bayesianos jerárquicos, estimados mediante la aproximación *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA), con regionalizaciones contiguas basadas en mallas hexagonales constituye un marco analítico sólido, reproducible y conceptualmente apropiado para estudiar la dinámica espacio-temporal del homicidio en Medellín. Los resultados confirman que, al emplear unidades espaciales homogéneas y estructuras que combinan dependencia espacial e inercia temporal, es posible caracterizar con alta precisión la persistencia territorial del riesgo, la estabilidad de los focos históricos y la propagación gradual de variaciones locales a través del tiempo y del espacio.

Un aporte central de esta investigación es la identificación del papel decisivo que desempeña la escala espacial en el desempeño del modelo. Las regionalizaciones con apotemas entre 1 500 y 2 500 metros alcanzan de manera consistente los valores más favorables en criterios de ajuste (DIC y WAIC), estabilidad (LGOCV) y coherencia predictiva. Las resoluciones intermedias —especialmente entre 1 900 y 2 000 metros— representan un punto de equilibrio singular: reproducen el desempeño de las escalas óptimas, pero retienen una granularidad territorial valiosa para interpretar dinámicas microespaciales. Este hallazgo reafirma la importancia de abordar explícitamente el *modifiable areal unit problem* (MAUP) y evidencia que una regionalización homogénea y contigua minimiza distorsiones derivadas de límites administrativos heterogéneos.

Desde la perspectiva predictiva, el modelo conserva una calibración estable: los intervalos de credibilidad del 95 % contienen sistemáticamente las observaciones en horizontes de uno y dos años, y la expansión observada a tres años refleja la propagación natural de la incertidumbre. En escalas más finas, la variabilidad local es mayor, pero se atenúa cuando aumenta la exposición poblacional o cuando la regionalización introduce coherencia temática entre áreas adyacentes. A partir de los 2 200 metros, las diferencias entre modelos elementales y regionalizados convergen, lo que revela un punto de estabilidad donde la precisión del pronóstico se mantiene sin sacrificar la capacidad de detectar patrones espaciales relevantes. Este equilibrio sugiere que el riesgo homicida posee regularidades internas suficientemente fuertes como para expresarse de manera consistente en escalas conceptualmente razonables.

El análisis de sensibilidad temporal confirma la capacidad del modelo para responder a

escenarios no estacionarios. La exclusión del año 2020 —alterado por restricciones de movilidad asociadas a la pandemia— reduce los errores de pronóstico en todos los escenarios, indicando que la estructura espacio-temporal estimada se mantiene coherente incluso ante perturbaciones externas. Las regionalizaciones muestran una recuperación más rápida que las unidades elementales, lo que sugiere que la agregación contigua actúa como un amortiguador estadístico frente a choques abruptos.

Los resultados también revelan que el modelo seleccionado —una estructura ICAR combinada con interacción espacio-temporal Tipo IV— ofrece una lectura sustantiva del proceso generador del riesgo. La predominancia del componente estructurado indica que el homicidio presenta una base espacial clara: los microterritorios contiguos tienden a compartir niveles similares de riesgo, y el modelo “presta fuerza” entre unidades con baja exposición. La interacción Tipo IV confirma que las variaciones locales no son independientes, sino que siguen trayectorias con memoria temporal y correlación espacial de corto alcance, reflejando patrones de persistencia y difusión territorial coherentes con la criminología del lugar. Asimismo, la limitada importancia del ruido no estructurado sugiere que la mayor parte de la variabilidad observada se explica mediante mecanismos de dependencia vecinal e inercia temporal.

Desde una perspectiva aplicada, estas propiedades tienen implicaciones directas para la política pública. En primer lugar, los *hotspots* deben entenderse como microzonas interconectadas, no como puntos aislados. Ignorar la contigüidad espacial puede generar desplazamientos indeseados del fenómeno o intervenciones fragmentadas. En segundo lugar, la inercia temporal indica que las estrategias sostenidas en el tiempo son más efectivas que las acciones puntuales. En tercer lugar, la tendencia del modelo a sobrestimar moderadamente los valores observados en áreas de alta incidencia es operativamente útil: sugiere adoptar una gestión asimétrica de la incertidumbre, sobredimensionando intervenciones en zonas críticas para evitar escenarios de subactuación institucional.

Finalmente, esta investigación abre varias rutas para avanzar en la caracterización del riesgo homicida. Una línea consiste en incorporar fuentes de datos dinámicas —movilidad humana, luminancia nocturna, indicadores de actividad económica— para mejorar la regionalización y aproximar mejor los límites funcionales de la ciudad, sin trasladar incertidumbre innecesaria al modelo predictivo. Otra línea consiste en migrar hacia representaciones basadas en redes urbanas, dada la evidencia de que parte del homicidio sigue patrones asociados a la conectividad vial. Los modelos sobre grafos permitirían capturar con mayor fidelidad la geometría operacional del delito.

Esta tesis ofrece una contribución significativa tanto en el ámbito metodológico como en el aplicado. Demuestra que los modelos espacio temporales bayesianos regionalizados permiten anticipar con coherencia y precisión el riesgo homicida, y que su uso sistemático puede transformar la manera en que las ciudades monitorean y gestionan la violencia letal. Más allá de Medellín, el marco propuesto constituye una referencia replicable para otros contextos urbanos de América Latina, donde la combinación de inferencia bayesiana, eficiencia computacional y representaciones espaciales resulta esencial para avanzar hacia políticas públicas basadas en evidencia.

# Referencias

- [1] Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD). *Informe Regional sobre Desarrollo Humano y Seguridad Ciudadana en América Latina*. Referencia genérica al PNUD sobre seguridad; ajusta edición/año exactos si corresponde. Nueva York, 2013.
- [2] United Nations Office on Drugs and Crime (UNODC). *Global Study on Homicide 2023*. Referencia a informe UNODC; precisa edición/capítulo usado. Vienna, 2023.
- [3] Andrés Felipe Lopera Becerra et al. *Territorio, crimen, comunidad. Heterogeneidad del homicidio en Medellín*. Universidad EAFIT, 2015.
- [4] Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE). *Boletines de Seguridad y Convivencia: Estadísticas de Criminalidad 2023*. Serie estadística oficial; precisa título/mes de boletín usado. Bogotá: DANE, 2023.
- [5] Sebastián Emilio Henao y María Juliana Rey. *Caracterización del homicidio en Medellín: período 2012-2018*. Alcaldía de Medellín. Sistema de Información para la Seguridad y la Convivencia (SISC), 2019.
- [6] David Weisburd, Elizabeth R. Groff y Sue-Ming Yang. *The Criminology of Place: Street Segments and Our Understanding of the Crime Problem*. Oxford University Press, oct. de 2012. ISBN: 9780195369083. DOI: [10.1093/acprof:oso/9780195369083.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780195369083.001.0001). URL: <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780195369083.001.0001>.
- [7] David Weisburd. “The law of crime concentration and the criminology of place”. En: *Criminology* 53 (2 2015). ISSN: 17459125. DOI: [10.1111/1745-9125.12070](https://doi.org/10.1111/1745-9125.12070).
- [8] Daniela Collazos et al. “Hot spots policing in a high-crime environment: an experimental evaluation in Medellín”. En: *Journal of Experimental Criminology* 17 (3 2021). ISSN: 15728315. DOI: [10.1007/s11292-019-09390-1](https://doi.org/10.1007/s11292-019-09390-1).
- [9] Ronald Clarke. “Situational crime prevention : successful case studies”. En: *Psychology* 4 (1 2011).
- [10] Gary S. Becker. “Crime and Punishment: An Economic Approach”. En: *Journal of Political Economy* 76 (2 1968). ISSN: 0022-3808. DOI: [10.1086/259394](https://doi.org/10.1086/259394).
- [11] Lawrence E. Cohen y Marcus Felson. “Social Change and Crime Rate Trends: A Routine Activity Approach”. En: *American Sociological Review* 44 (4 1979). ISSN: 00031224. DOI: [10.2307/2094589](https://doi.org/10.2307/2094589).
- [12] Jerry H. Ratcliffe. *Aoristic signatures and the spatio-temporal analysis of high volume crime patterns*. 2002. DOI: [10.1023/A:1013240828824](https://doi.org/10.1023/A:1013240828824).
- [13] Stan Openshaw. *The Modifiable Areal Unit Problem*. Norwich, UK: Geo Books, 1984.

- [14] A. S. Fotheringham y D. W.S. Wong. “The modifiable areal unit problem in multivariate statistical analysis”. En: *Environment & Planning A* 23 (7 1991). ISSN: 0308-518X. DOI: [10.1068/a231025](https://doi.org/10.1068/a231025).
- [15] Håvard Rue, Sara Martino y Nicolas Chopin. “Approximate Bayesian inference for latent Gaussian models by using integrated nested Laplace approximations”. En: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B: Statistical Methodology* 71 (2 2009). ISSN: 13697412. DOI: [10.1111/j.1467-9868.2008.00700.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-9868.2008.00700.x).
- [16] Marta Blangiardo y Michela Cameletti. “Spatial and Spatio-temporal Bayesian Models with R - INLA”. En: *Spatial and Spatio-temporal Bayesian Models with R - INLA* (2015). DOI: [10.1002/9781118950203](https://doi.org/10.1002/9781118950203).
- [17] R. M. Assunção et al. “Efficient regionalization techniques for socio-economic geographical units using minimum spanning trees”. En: *International Journal of Geographical Information Science* 20 (7 2006). ISSN: 13658816. DOI: [10.1080/13658810600665111](https://doi.org/10.1080/13658810600665111).
- [18] Juan C. Duque, Luc Anselin y Sergio J. Rey. “The max-p-regions problem”. En: *Journal of Regional Science* 52 (3 2012). ISSN: 00224146. DOI: [10.1111/j.1467-9787.2011.00743.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-9787.2011.00743.x).
- [19] Erick Orozco-Acosta et al. “A scalable approach for short-term disease forecasting in high spatial resolution areal data”. En: *Biometrical Journal* 65 (8 2023). ISSN: 15214036. DOI: [10.1002/bimj.202300096](https://doi.org/10.1002/bimj.202300096).
- [20] Andrea Riebler et al. “An intuitive Bayesian spatial model for disease mapping that accounts for scaling”. En: *Statistical Methods in Medical Research*. Vol. 25. 2016. DOI: [10.1177/0962280216660421](https://doi.org/10.1177/0962280216660421).
- [21] Sigrunn Holbek Sørbye y Håvard Rue. “Scaling intrinsic Gaussian Markov random field priors in spatial modelling”. En: *Spatial Statistics* 8 (C 2014). ISSN: 22116753. DOI: [10.1016/j.spasta.2013.06.004](https://doi.org/10.1016/j.spasta.2013.06.004).
- [22] Lawrence W. Sherman, Patrick R. Gartin y Michael E. Buerger. “Hot spots of predatory crime: Routine activities and the criminology of place”. En: *Criminology* 27.1 (1989), págs. 27-56. DOI: [10.1111/j.1745-9125.1989.tb00862.x](https://doi.org/10.1111/j.1745-9125.1989.tb00862.x).
- [23] Spencer Chainey y Jerry Ratcliffe. “GIS and Crime Mapping”. En: *GIS and Crime Mapping* (2013). DOI: [10.1002/9781118685181](https://doi.org/10.1002/9781118685181).
- [24] Alberto R Gonzales, Regina B Schofield y Sarah V Hart. “Mapping Crime : Understanding Hot Spots”. En: *National Institute of Justice* (2005), pág. 79.
- [25] Martin Ester et al. “A Density-Based Algorithm for Discovering Clusters A Density-Based Algorithm for Discovering Clusters in Large Spatial Databases with Noise”. En: *Proceedings - 2nd International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, KDD 1996*. 1996.
- [26] Luc Anselin. “Some robust approaches to testing and estimation in spatial econometrics”. En: *Regional Science and Urban Economics* 20 (2 1990). ISSN: 01660462. DOI: [10.1016/0166-0462\(90\)90001-J](https://doi.org/10.1016/0166-0462(90)90001-J).
- [27] James LeSage y R. Kelley Pace. *Introduction to spatial econometrics*. 2009. DOI: [10.1111/j.1467-985x.2010.00681\\_13.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-985x.2010.00681_13.x).
- [28] Steven F. Messner et al. “The Spatial Patterning of County Homicide Rates: An Application of Exploratory Spatial Data Analysis”. En: *Journal of Quantitative Criminology* 15 (4 1999). ISSN: 07484518. DOI: [10.1023/A:1007544208712](https://doi.org/10.1023/A:1007544208712).

- [29] Robert D. Baller et al. “Structural covariates of U.S. County homicide rates: Incorporating spatial effects”. En: *Criminology* 39 (3 2001). ISSN: 00111384. DOI: [10.1111/j.1745-9125.2001.tb00933.x](https://doi.org/10.1111/j.1745-9125.2001.tb00933.x).
- [30] George E. Tita y Steven M. Radil. “Spatializing the Social Networks of Gangs to Explore Patterns of Violence”. En: *Journal of Quantitative Criminology* 27 (4 2011). ISSN: 07484518. DOI: [10.1007/s10940-011-9136-8](https://doi.org/10.1007/s10940-011-9136-8).
- [31] A. Stewart Fotheringham, Wenbai Yang y Wei Kang. “Multiscale Geographically Weighted Regression (MGWR)”. En: *Annals of the American Association of Geographers* 107 (6 2017). ISSN: 24694460. DOI: [10.1080/24694452.2017.1352480](https://doi.org/10.1080/24694452.2017.1352480).
- [32] Martin A Andresen y Olivia K Ha. “Spatially varying relationships between immigration measures and property crime Types in Vancouver Census Tracts, 2016”. En: *The British Journal of Criminology* 60.5 (mayo de 2020), págs. 1342-1367. ISSN: 0007-0955. DOI: [10.1093/bjc/azaa029](https://doi.org/10.1093/bjc/azaa029). eprint: <https://academic.oup.com/bjc/article-pdf/60/5/1342/33557583/azaa029.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/bjc/azaa029>.
- [33] Jianguo Chen et al. “Modeling Spatial Effect in Residential Burglary: A Case Study from ZG City, China”. En: *ISPRS International Journal of Geo-Information* 6.5 (2017). ISSN: 2220-9964. DOI: [10.3390/ijgi6050138](https://doi.org/10.3390/ijgi6050138). URL: <https://www.mdpi.com/2220-9964/6/5/138>.
- [34] Carlos Silva et al. “Spatial Modeling for Homicide Rates Estimation in Pernambuco State-Brazil”. En: *ISPRS International Journal of Geo-Information* 9.12 (2020). ISSN: 2220-9964. DOI: [10.3390/ijgi9120740](https://doi.org/10.3390/ijgi9120740). URL: <https://www.mdpi.com/2220-9964/9/12/740>.
- [35] Julian Besag, Jeremy York y Annie Mollié. “Bayesian image restoration, with two applications in spatial statistics”. En: *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 43 (1 1991). ISSN: 00203157. DOI: [10.1007/BF00116466](https://doi.org/10.1007/BF00116466).
- [36] Paul Elliott et al. *Spatial Epidemiology: Methods and Applications*. Oxford University Press, ago. de 2001. ISBN: 9780198515326. DOI: [10.1093/acprof:oso/9780198515326.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198515326.001.0001). URL: <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198515326.001.0001>.
- [37] Havard Rue et al. *Bayesian computing with INLA: A review*. 2017. DOI: [10.1146/annurev-statistics-060116-054045](https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-060116-054045).
- [38] F Lindgren, H Rue y J Lindström. “An explicit link between Gaussian fields and Gaussian Markov random fields: The SPDE approach”. En: *J. R. Stat. Soc. B* 73 (4 2011).
- [39] G. Vicente, T. Goicoa y M. D. Ugarte. “Bayesian inference in multivariate spatio-temporal areal models using INLA: analysis of gender-based violence in small areas”. En: *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* 34 (10 2020). ISSN: 14363259. DOI: [10.1007/s00477-020-01808-x](https://doi.org/10.1007/s00477-020-01808-x).
- [40] Pere Boqué, Marc Saez y Laura Serra. “Need to go further: using INLA to discover limits and chances of burglaries’ spatiotemporal prediction in heterogeneous environments”. En: *Crime Science* 11 (1 2022). ISSN: 21937680. DOI: [10.1186/s40163-022-00169-w](https://doi.org/10.1186/s40163-022-00169-w).
- [41] Erick Orozco-Acosta, Aritz Adin y María Dolores Ugarte. “Big problems in spatio-temporal disease mapping: Methods and software”. En: *Computer Methods and Programs in Biomedicine* 231 (2023). ISSN: 18727565. DOI: [10.1016/j.cmpb.2023.107403](https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2023.107403).

- [42] Erick Orozco-Acosta, Aritz Adin y María Dolores Ugarte. “Scalable Bayesian modelling for smoothing disease risks in large spatial data sets using INLA”. En: *Spatial Statistics* 41 (2021). ISSN: 22116753. DOI: [10.1016/j.spasta.2021.100496](https://doi.org/10.1016/j.spasta.2021.100496).
- [43] Leonhard Knorr-Held. “Bayesian modelling of inseparable space-time variation in disease risk”. En: *Statistics in Medicine*. Vol. 19. 2000. DOI: [10.1002/1097-0258\(20000915/30\)19:17/18<2555::aid-sim587>3.0.co;2-%23](https://doi.org/10.1002/1097-0258(20000915/30)19:17/18<2555::aid-sim587>3.0.co;2-%23).
- [44] Carlos Carcach. “A Bayesian spatio-temporal model of variation in homicide rates for El Salvador”. En: *PLoS One* 20.9 (2025), e0330215.
- [45] Daniel Simpson et al. “Penalising model component complexity: A principled, practical approach to constructing priors”. En: *Statistical Science* 32 (1 2017). ISSN: 08834237. DOI: [10.1214/16-ST576](https://doi.org/10.1214/16-ST576).
- [46] Felipe Santos-Marquez. “Spatial beta-convergence forecasting models: Evidence from municipal homicide rates in Colombia”. En: *Journal of Forecasting* 41 (2 2022). ISSN: 1099131X. DOI: [10.1002/for.2816](https://doi.org/10.1002/for.2816).
- [47] Sohrab Hossain et al. “Crime prediction using spatio-temporal data”. En: *Communications in Computer and Information Science*. Vol. 1235 CCIS. 2020. DOI: [10.1007/978-981-15-6648-6\\_22](https://doi.org/10.1007/978-981-15-6648-6_22).
- [48] Keivan Kianmehr y Reda Alhajj. “Effectiveness of support vector machine for crime hot-spots prediction”. En: *Applied Artificial Intelligence* 22 (5 2008). ISSN: 08839514. DOI: [10.1080/08839510802028405](https://doi.org/10.1080/08839510802028405).
- [49] Andrey Bogomolov et al. “Once upon a crime: Towards crime prediction from demographics and mobile data”. En: *ICMI 2014 - Proceedings of the 2014 International Conference on Multimodal Interaction*. 2014. DOI: [10.1145/2663204.2663254](https://doi.org/10.1145/2663204.2663254).
- [50] Andrey Bogomolov et al. “Moves on the street: Classifying crime hotspots using aggregated anonymized data on people dynamics”. En: *Big Data* 3 (3 2015). ISSN: 2167647X. DOI: [10.1089/big.2014.0054](https://doi.org/10.1089/big.2014.0054).
- [51] Nicolás Esquivel et al. “Spatio-Temporal Prediction of Baltimore Crime Events Using CLSTM Neural Networks”. En: *IEEE Access* 8 (2020). ISSN: 21693536. DOI: [10.1109/ACCESS.2020.3036715](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3036715).
- [52] Hyeon-Woo Kang y Hang-Bong Kang. “Prediction of crime occurrence from multimodal data using deep learning”. En: *PLOS ONE* 12.4 (abr. de 2017), págs. 1-19. DOI: [10.1371/journal.pone.0176244](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0176244). URL: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0176244>.
- [53] Filiz Ersöz et al. “Artificial Intelligence in Crime Prediction: A Survey With a Focus on Explainability”. En: *IEEE Access* 13 (2025), págs. 59646-59674. DOI: [10.1109/ACCESS.2025.3553934](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2025.3553934).
- [54] Cynthia Rudin. *Stop explaining black box machine learning models for high stakes decisions and use interpretable models instead*. 2019. DOI: [10.1038/s42256-019-0048-x](https://doi.org/10.1038/s42256-019-0048-x).
- [55] Alejandro Barredo Arrieta et al. “Explainable Artificial Intelligence (XAI): Concepts, taxonomies, opportunities and challenges toward responsible AI”. En: *Information Fusion* 58 (2020). ISSN: 15662535. DOI: [10.1016/j.inffus.2019.12.012](https://doi.org/10.1016/j.inffus.2019.12.012).
- [56] Riccardo Guidotti et al. “A survey of methods for explaining black box models”. En: *ACM Computing Surveys* 51 (5 2019). ISSN: 15577341. DOI: [10.1145/3236009](https://doi.org/10.1145/3236009).

- [57] R. M. Assunção et al. “Efficient regionalization techniques for socio-economic geographical units using minimum spanning trees”. En: *International Journal of Geographical Information Science* 20.7 (2006), págs. 797-811. DOI: [10.1080/13658810600665111](https://doi.org/10.1080/13658810600665111). eprint: <https://doi.org/10.1080/13658810600665111>. URL: <https://doi.org/10.1080/13658810600665111>.
- [58] P. J. Brantingham y P. L. Brantingham. “Environmental criminology.” En: *Environmental criminology*. (1982). ISSN: 00472352. DOI: [10.4324/9781003060581-22](https://doi.org/10.4324/9781003060581-22).
- [59] Waldo R. Tobler. “A computer movie simulating urban growth in the Detroit region”. En: *Economic Geography* 46.2 (1970), págs. 234-240.
- [60] Robert J. Sampson, Stephen W. Raudenbush y Felton Earls. “Neighborhoods and violent crime: A multilevel study of collective efficacy”. En: *Science* 277 (5328 1997). ISSN: 00368075. DOI: [10.1126/science.277.5328.918](https://doi.org/10.1126/science.277.5328.918).
- [61] C G Amrhein. “Searching for the Elusive Aggregation Effect: Evidence from Statistical Simulations”. En: *Environment and Planning A: Economy and Space* 27 (1 1995). ISSN: 0308-518X. DOI: [10.1068/a270105](https://doi.org/10.1068/a270105).
- [62] Colin PD Birch, Sander P Oom y Jonathan A Beecham. “Rectangular and hexagonal grids used for observation, experiment and simulation in ecology”. En: *Ecological modelling* 206.3-4 (2007), págs. 347-359.
- [63] D. Guo. “Regionalization with dynamically constrained agglomerative clustering and partitioning (REDCAP)”. En: *International Journal of Geographical Information Science* 22 (7 2008). ISSN: 13658816. DOI: [10.1080/13658810701674970](https://doi.org/10.1080/13658810701674970).
- [64] Olivier Ledoit y Michael Wolf. “A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices”. En: *Journal of Multivariate Analysis* 88 (2 2004). ISSN: 0047259X. DOI: [10.1016/S0047-259X\(03\)00096-4](https://doi.org/10.1016/S0047-259X(03)00096-4).
- [65] Juliane Schäfer y Korbinian Strimmer. “A shrinkage approach to large-scale covariance matrix estimation and implications for functional genomics”. En: *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology* 4 (1 2005). ISSN: 15446115. DOI: [10.2202/1544-6115.1175](https://doi.org/10.2202/1544-6115.1175).
- [66] Joseph B. Kruskal. “On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem”. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 7 (1 1956). ISSN: 0002-9939. DOI: [10.1090/s0002-9939-1956-0078686-7](https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1956-0078686-7).
- [67] R. C. Prim. “Shortest Connection Networks And Some Generalizations”. En: *Bell System Technical Journal* 36 (6 1957). ISSN: 15387305. DOI: [10.1002/j.1538-7305.1957.tb01515.x](https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1957.tb01515.x).
- [68] Peter J. Rousseeuw. “Silhouettes: A graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis”. En: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 20 (C 1987). ISSN: 03770427. DOI: [10.1016/0377-0427\(87\)90125-7](https://doi.org/10.1016/0377-0427(87)90125-7).
- [69] Robert Tibshirani, Guenther Walther y Trevor Hastie. “Estimating the number of clusters in a data set via the gap statistic”. En: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B: Statistical Methodology* 63 (2 2001). ISSN: 13697412. DOI: [10.1111/1467-9868.00293](https://doi.org/10.1111/1467-9868.00293).
- [70] Roger S. Bivand, Edzer Pebesma y Virgilio Gómez-Rubio. *Applied Spatial Data Analysis with R: Second Edition*. 2013. DOI: [10.1007/978-1-4614-7618-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7618-4).
- [71] Edward Greenberg. *Introduction to Bayesian econometrics*. 2007. DOI: [10.1017/CB09780511808920](https://doi.org/10.1017/CB09780511808920).

- [72] Anthony O’Hagan y Jonathan Forster. *Bayesian Inference*. Vol. 2B. Kendall’s Advanced Theory of Statistics. Arnold, 2004.
- [73] Andrew Gelman et al. *Bayesian data analysis, third edition*. CRC Press, 2013.
- [74] José M. Bernardo y Adrian F. M. Smith. *Bayesian Theory*. Wiley, 2000.
- [75] Christian P Robert. *The Bayesian Choice: From Decision-Theoretic Foundations to Computational Implementation*. Vol. 91. 2007.
- [76] Mikel Bergara. “Validación de modelos predictivos espacio–temporales de la incidencia y mortalidad por cáncer”. Tesis de mtría. Universidad del País Vasco, 2024.
- [77] Brian G. Leroux, Xingye Lei y Norman Breslow. “Estimation of Disease Rates in Small Areas: A new Mixed Model for Spatial Dependence”. En: 2000. DOI: [10.1007/978-1-4612-1284-3\\_4](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1284-3_4).
- [78] T. Goicoa et al. “Age-space-time CAR models in Bayesian disease mapping”. En: *Statistics in Medicine* 35 (14 2016). ISSN: 10970258. DOI: [10.1002/sim.6873](https://doi.org/10.1002/sim.6873).
- [79] Tomás Goicoa, Jaione Etxeberria y María Dolores Ugarte. “Splines in disease mapping”. En: *Handbook of Spatial Epidemiology*. 2016. DOI: [10.1201/b19470-19](https://doi.org/10.1201/b19470-19).
- [80] “Accurate approximations for posterior moments and marginal densities”. En: *Journal of the American Statistical Association* 81 (393 1986). ISSN: 1537274X. DOI: [10.1080/01621459.1986.10478240](https://doi.org/10.1080/01621459.1986.10478240).
- [81] Sara Martino y Andrea Riebler. “Integrated Nested Laplace Approximations (INLA)”. En: *Wiley StatsRef: Statistics Reference Online*. 2020. DOI: [10.1002/9781118445112.stat08212](https://doi.org/10.1002/9781118445112.stat08212).
- [82] David J Spiegelhalter et al. “Bayesian measures of model complexity and fit”. En: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* 64.4 (2002), págs. 583-639. DOI: [10.1111/1467-9868.00353](https://doi.org/10.1111/1467-9868.00353).
- [83] Sumio Watanabe. “Asymptotic equivalence of Bayes cross validation and widely applicable information criterion in singular learning theory”. En: *Journal of Machine Learning Research* 11 (2010). ISSN: 15324435.
- [84] Pete Chapman et al. “CRISP-DM 1.0: Step-by-step data mining guide”. En: *SPSS inc* 9.13 (2000), págs. 1-73.
- [85] R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria, 2025. URL: <https://www.R-project.org/>.
- [86] Andrew Gelman, Jessica Hwang y Aki Vehtari. “Understanding predictive information criteria for Bayesian models”. En: *Statistics and Computing* 24.6 (2014), págs. 997-1016.

# Anexos

## .1 Protocolo de evaluación y selección de modelos

El proceso de comparación entre configuraciones espacio–temporales se diseñó siguiendo un protocolo estructurado, orientado a integrar ajuste bayesiano, capacidad predictiva y estabilidad espacial bajo un marco transparente y reproducible. Este protocolo consta de cuatro etapas complementarias: (i) evaluación comparativa de ajuste penalizado; (ii) filtrado jerárquico de configuraciones; (iii) validación predictiva fuera de muestra; y (iv) construcción de un índice predictivo compuesto.

Cabe señalar que la estructura completa del protocolo —incluyendo el índice Borda ponderado, el filtrado jerárquico, la definición empírica de escenarios espaciales y el índice predictivo compuesto  $S(\theta)$ — constituye un desarrollo metodológico elaborado específicamente para esta tesis. Aunque no se presenta como una innovación tecnológica formal, surgió de la necesidad de comparar modelos espacio–temporales con estructuras heterogéneas bajo criterios estables y replicables, y constituye una contribución aplicada relevante para contextos urbanos con conteos raros y alta heterogeneidad espacial.

### .1.1 Etapa I. Evaluación de ajuste penalizado

Para cada modelo ajustado mediante INLA, se calcularon los criterios de ajuste penalizado introducidos en la Sección 4.3.7: WAIC, DIC y LPML (vía CPO). Estas métricas permiten evaluar la concordancia entre modelo y datos, penalizando explícitamente la complejidad efectiva.

Adicionalmente, se registraron dos indicadores complementarios: el número efectivo de parámetros y el tiempo de ejecución. Con el fin de sintetizar estas medidas heterogéneas, cada métrica se transformó a un rango normalizado  $r_c(\theta)$ , en el cual valores menores indican mejor desempeño.

A partir de estos rangos se definió un índice Borda ponderado:

$$B(\theta) = 0,45 r_{\text{WAIC}}(\theta) + 0,40 r_{\text{LPML}}(\theta) + 0,10 r_{\text{TIME}}(\theta) + 0,05 r_{\text{PAR}}(\theta),$$

donde las ponderaciones reflejan la importancia relativa de ajuste predictivo penalizado (WAIC y LPML) frente a consideraciones de eficiencia computacional y parsimonia. El conjunto

de configuraciones con menor  $B(\theta)$  constituye el subconjunto preliminar de modelos con desempeño interno superior.

## .1.2 Etapa II. Filtrado jerárquico de configuraciones

El ranking inicial puede contener múltiples modelos con desempeños equivalentes pero pertenecientes a la misma combinación estructural. Para evitar redundancia e inducir diversidad metodológica, se aplicó un filtro jerárquico que selecciona, dentro de cada bloque definido por: estructura espacial, interacción espacio-temporal, resolución espacial.

únicamente la configuración con menor valor de  $B(\theta)$ . Este paso garantiza representatividad de todas las familias de modelos consideradas (ICAR, BYM, BYM2 y Tipos I–IV de interacción), manteniendo un conjunto acotado y equilibrado para la evaluación predictiva.

## .1.3 Etapa III. Validación predictiva fuera de muestra

La validación prospectiva se llevó a cabo mediante un esquema *rolling-window*, consistente en entrenar cada modelo sobre una ventana histórica y evaluar su capacidad para pronosticar el periodo inmediatamente posterior, de acuerdo con la estrategia descrita en la Sección 4.3.6. Las predicciones se expresaron como tasas por 100 000 habitantes.

### Definición empírica de escenarios espaciales

Con el propósito de evaluar la estabilidad predictiva bajo distintos regímenes de incidencia, se construyeron cuatro escenarios espaciales a partir de la participación media de cada unidad en el total anual de homicidios recientes (años 2022–2023). Para cada unidad espacial  $i$ , se calculó:

$$\bar{w}_i = \frac{1}{T^*} \sum_{t \in \{2022, 2023\}} \frac{y_{it}}{\sum_j y_{jt}},$$

donde  $T^* = 2$  es el número de años utilizados. A partir de la distribución de  $\bar{w}_i$ , y siguiendo el procedimiento implementado en el código analítico, se definieron:

- **Hotspots (H):** unidades con participaciones promedio entre el percentil 90 y el máximo.
- **Coldspots (C):** unidades con participaciones promedio entre el mínimo y el percentil 10.
- **Resto (R):** unidades intermedias entre ambos extremos.
- **Agregado (A):** promedio urbano ponderado, usado para evaluar estabilidad global.

Esta clasificación es una construcción original de la tesis y permite evaluar modelos con respecto a los diferentes niveles de concentración espacial del homicidio.

### Métricas predictivas

Para cada escenario  $g \in \{H, C, R, A\}$  y para cada modelo  $\theta$ , se calcularon:

$$\text{MAE}_g(\theta) = \frac{1}{n_g} \sum_{i \in g} |\hat{\lambda}_i - \lambda_i|,$$

$$\text{IS}_g(\theta) = \frac{1}{n_g} \sum_{i \in g} \left[ (u_i - l_i) + \frac{2}{\alpha} (l_i - \lambda_i) \mathbf{1}\{\lambda_i < l_i\} + \frac{2}{\alpha} (\lambda_i - u_i) \mathbf{1}\{\lambda_i > u_i\} \right],$$

con  $\alpha = 0,05$ . Estas métricas cuantifican precisión puntual (MAE) y calibración de la incertidumbre (IS).

### .1.4 Etapa IV. Índice compuesto de desempeño

Debido a que cada escenario captura un patrón espacial distinto, las métricas  $\text{MAE}_g$  e  $\text{IS}_g$  no son directamente comparables entre sí. Por ello se estandarizaron mediante puntuaciones tipificadas:

$$z_{g,m}(\theta) = \frac{m_g(\theta) - \mu_{g,m}}{\sigma_{g,m}}, \quad m \in \{\text{MAE}, \text{IS}\},$$

donde  $\mu_{g,m}$  y  $\sigma_{g,m}$  son la media y desviación estándar del indicador en el escenario  $g$ .

A partir de estas puntuaciones se definió un índice predictivo compuesto:

$$S(\theta) = 0,30 z_{H,\text{IS}}(\theta) + 0,20 z_{H,\text{MAE}}(\theta) + 0,15 z_{C,\text{MAE}}(\theta) + 0,15 z_{R,\text{IS}}(\theta) + 0,20 z_{A,\text{IS}}(\theta).$$

La ponderación privilegia el desempeño en *Hotspots* dada su relevancia operativa, seguida por el desempeño agregado y las otras regiones como complemento. El valor mínimo de  $S(\theta)$  identifica el modelo con mejor equilibrio predictivo y estabilidad espacial.

## .2 Distribución predictiva de los conteos

La obtención de pronósticos espacio-temporales se realizó de forma coherente con la formulación bayesiana descrita en la Sección 4.3.6. En R-INLA, las predicciones se habilitan especificando `compute = TRUE` en `control.predictor` y solicitando los marginales del predictor lineal mediante `return.marginals.predictor = TRUE`. Para cada horizonte futuro, los conteos se declaran como NA y se proporciona la población proyectada  $N_{it}^*$ , de forma consistente con el término de exposición utilizado en la verosimilitud Poisson (Sección 4.3.1).

El valor esperado del conteo posterior predictivo se obtiene aplicando la ley de la esperanza iterada sobre la distribución definida en la Sección 4.3.6. Dado que INLA entrega las marginales aproximadas de  $\lambda_{it}^*$ , la media predictiva se aproxima mediante

$$\mu_{it}^* = \mathbb{E}[y_{it}^* | \mathbf{y}_{-it}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(y_{it}^* | \lambda_{it}^*) | \mathbf{y}_{-it}] = \mathbb{E}[N_{it}^* \lambda_{it}^* | \mathbf{y}_{-it}] \approx N_{it}^* \mathbb{E}[\lambda_{it}^* | \mathbf{y}_{-it}],$$

Para caracterizar la incertidumbre asociada al conteo futuro, se empleó el procedimiento estándar basado en simulación posterior descrito por Orozco-Acosta et al. [19]. A partir de los marginales de  $\lambda_{it}^*$  proporcionados por INLA, se generan  $S$  réplicas:

$$\lambda_{it}^{*(s)} \sim p(\lambda_{it}^* \mid \mathbf{y}_{-it}), \quad s = 1, \dots, S,$$

y, condicionalmente en cada una de ellas, se simulan los conteos predictivos mediante la estructura Poisson del modelo:

$$y_{it}^{*(s)} \sim \text{Poisson}(N_{it}^* \lambda_{it}^{*(s)}).$$

Los cuantiles empíricos de la colección  $\{y_{it}^{*(s)}\}_{s=1}^S$  proporcionan intervalos de credibilidad del 95 % para los conteos futuros, y sus transformaciones permiten expresar los resultados en tasas por 100 000 habitantes. Este procedimiento garantiza consistencia entre el modelo jerárquico, el término de exposición y la estructura espacio-temporal latente, preservando la interpretación probabilística completa de las proyecciones.