

**DESARROLLO DE UN MÓDULO DIDÁCTICO PARA EL CONTROL DE UNA
PLANTA DE PÉNDULO INVERTIDO**

JOHANN ALDIBER GARCIA ZAPATA

**INSTITUCIÓN UNIVERSIARIA PASCUAL BRAVO
FACULTAD DE INGENIERÍA
INGENIERIA ELÉCTRICA
MEDELLÍN
2025**

**DESARROLLO DE UN MÓDULO DIDÁCTICO PARA EL CONTROL DE UNA
PLANTA DE PÉNDULO INVERTIDO**

JOHANN ALDIBER GARCIA ZAPATA

Trabajo de grado para optar al título de ingeniero electricista

Asesor técnico:

**Carlos Mario Moreno Paniagua
Ingeniero eléctrico.**

Asesor metodológico:

**Mateo Rico García
Ingeniero electrónico, Msc.**

INSTITUCIÓN UNIVERSIARIA PASCUAL BRAVO

FACULTAD DE INGENIERÍA

INGENIERIA ELÉCTRICA

MEDELLÍN

2025

Contenido

1.	Planteamiento del problema	12
1.1	Descripción.....	12
1.2	Formulación	12
2.	Justificación	13
3.	Objetivos.....	14
3.1	Objetivo general	14
3.2	Objetivos específicos.....	14
4.	Referentes teóricos	15
4.1	Modelado Matemático de Sistemas Mecánicos No Lineales.....	15
4.2	Control PID en Sistemas No Lineales.....	16
4.3	Verificación y validación de modelos de simulación.....	18
4.4	Sistemas dinámicos	19
4.5	Función de transferencia	21
4.6	Representación Matemática en Diagramas de Bloques y Realimentación	22
4.7	MATLAB y Simulink: Fundamentos y Aplicaciones.....	23
4.8	El Péndulo Invertido como Sistema de Control	24
4.9	Simulación de Sistemas Dinámicos	25
4.10	Análisis de Sistemas Dinámicos: Primer, Segundo y Orden Superior.....	26
4.11	Métodos Didácticos en Ingeniería Electrónica.....	28
4.12	Ingeniería basada en modelos (Model-Based Design - MBD)	29
5.	Metodología.....	31
5.1	Tipo de proyecto.....	31
5.2	Método	31
5.3	Instrumentos de recolección de información.	32

6.	Resultados.....	33
7.	Conclusiones.....	45
8.	Recomendaciones	46
9.	Referencias bibliográficas	47
10.	Bibliografía.....	49

Lista de figuras

	Pág.
Figura 1. Ejemplo de un sistema mecánico no-lineal.	15
Figura 2. Representación en bloque de un PID no lineal.	17
Figura 3. Ilustración del proceso de validación demodelos.....	18
Figura 4. Diferentes tipos de funciones de transferencia.....	21
Figura 5. Bloques de control con retroalimentación.	22
Figura 6. Entorno de matlab con Simulink.....	23
Figura 7. Diagrama de un sistema de péndulo invewrtido.	24
Figura 8. Onda sinusoidal resultado de la simulación de un sistema de péndulo.	25
Figura 9. Distribución de maletín didáctico para PLC.	28
Figura 10. Representación del péndulo invertido y los diferentes parámetros de cálculo.	33
Figura 11. Resultado de la simulación del modelo.....	35
Figura 12. Protoboard utilizado en el proyecto.	36
Figura 13. Cable de conexión fácil Dupont de 30 cm.	36
Figura 14. Arduino Uno Rev3	37
Figura 15. Mini PC MaxMini B.	37
Figura 16. Monitor digital de 10.1 pulgadas HDMI.....	38
Figura 17. Cconector 250VAC 15A, con suiche.	38
Figura 18. Caja Redline de aluminio con refuerzos en PVC.....	39
Figura 19. Maletín didáctico cerrado con monitor, conectores y módulo de prueba.	39
Figura 20. Maletín didáctico abierto mostrando conexiones internas.	40
Figura 21. Vista detallada del Arduino y protoboard.	40
Figura 22. Sistema completo del módulo didáctico.	41
Figura 23. Maletín didáctico con pantalla instalada y modulo intercambiable.	41

Lista de tablas

	Pág.
Tabla 1	42

Resumen

DESARROLLO DE UN MÓDULO DIDÁCTICO PARA EL CONTROL DE UNA PLANTA DE PÉNDULO INVERTIDO

JOHANN ALDIBER GARCIA ZAPATA

Se describe el desarrollo de un módulo didáctico para la implementación prácticas de control de péndulo invertido con *Simulink* y con un módulo tipo Arduino. El proyecto tiene como objetivo principal permitir la comprensión de los sistemas de control automático a través de casos de experiencia práctica, que lleven a la comparación directa del comportamiento de un modelo simulado con el de una planta de control real. Para el desarrollo del proyecto se implementó un maletín didáctico portátil que incluye sensores, actuadores y elementos de visualización, para la realización de diferentes pruebas de control discreto y proporcional que modelan variables analógicas. A partir de estas pruebas se recogen datos para validar la operación del sistema tanto a nivel de simulación como en condiciones reales. El trabajo con el maletín didáctico permite observar que la integración entre simulación y práctica fortalece el proceso de aprendizaje de la disciplina de control automático y lleva a los estudiantes a interactuar directamente con las variables del sistema y analizar su respuesta con respecto a diferentes tipos de estímulo.

Palabras claves: Péndulo, péndulo invertido, *Simulink*, Arduino, Control proporcional, maletín didáctico.

Abstract

The development of a didactic module for the implementation of inverted pendulum control practices with Simulink and an Arduino-type module is described. The main objective of the project is to allow the understanding of automatic control systems through practical experience cases, leading to the direct comparison of the behavior of a simulated model with that of a real control plant. For the development of the project, a portable didactic suitcase was implemented that included sensors, actuators, and visualization elements, for conducting different tests of discrete and proportional control that model analog variables. From these tests, data is collected to validate the operation of the system both at the simulation level and in real conditions.

Working with the educational kit allows us to observe that the integration between simulation and practice strengthens the learning process in the field of automatic control and leads students to interact directly with the system variables and analyze their response to different types of stimuli.

Keywords: Pendulum, inverted pendulum, Simulink, Arduino, proportional control, educational suitcase.

Glosario

Coefficiente de Amortiguamiento: Parámetro de un sistema de control automático que define la cantidad de disipación de energía en un sistema de segundo orden, influyendo en su estabilidad y respuesta transitoria.

Control automático: Técnica utilizada para regular una variable física en un sistema mediante sensores y controladores, asegurando que se mantenga dentro de un rango deseado.

Error Cuadrático Medio: Métrica utilizada en la validación de modelos para medir la diferencia promedio entre los valores simulados y los valores reales de un sistema.

Espacio de Estados: Representación matemática de un sistema dinámico mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, usando matrices para describir la evolución de las variables de estado.

Estabilidad: El análisis de estabilidad implica la evaluación del comportamiento de un sistema para determinar si sus respuestas se mantienen dentro de límites controlados o divergen con el tiempo.

Función de Transferencia: Expresión matemática que relaciona la salida y la entrada de un sistema en el dominio de la frecuencia mediante la transformada de Laplace. Se usa para analizar la estabilidad y respuesta del sistema.

Laplace (Transformada): Recurso matemático utilizado en sistemas de control para convertir ecuaciones diferenciales en expresiones algebraicas, facilitando su análisis en el dominio de la frecuencia.

Método de Lugar de las Raíces: Técnica gráfica utilizada en el análisis de control para estudiar la variación de los polos de la función de transferencia al modificar un parámetro del sistema.

Modelo Matemático: Estructura basada en ecuaciones que describe el comportamiento de un sistema físico o abstracto.

Modulación por Ancho de Pulso: Técnica utilizada en electrónica y control para regular la potencia entregada a un dispositivo variando el ancho de pulso de una señal de encendido y apagado.

Péndulo invertido: Es un sistema mecánico que consiste en un carro que puede moverse horizontalmente y sobre el cual se encuentra un péndulo que puede rotar. Este sistema es un problema clásico en dinámica y teoría de control.

Proporcional-Integral-Derivativo: Algoritmo de control que ajusta la salida de un sistema basado en tres parámetros: proporcional (P), integral (I) y derivativo (D).

Respuesta Transitoria: Comportamiento de un sistema dinámico desde el momento en que recibe una perturbación hasta que alcanza su estado estable. Se analiza con herramientas como la función de transferencia.

Simulación: Proceso de modelado de un sistema real en un entorno virtual para analizar su comportamiento bajo diferentes condiciones sin necesidad de construir un prototipo físico.

Sistema Dinámico: Un sistema cuya salida depende no solo de las entradas actuales, sino también de su historial de estados. Se puede modelar mediante ecuaciones diferenciales, funciones de transferencia o representaciones en espacio de estados.

Variables de estado: Son el conjunto más pequeño de variables que determinan el comportamiento dinámico de un sistema. Estas variables son fundamentales para entender y analizar el comportamiento de sistemas en diversas disciplinas.

Introducción

El control de sistemas dinámicos es un tema fundamental en la ingeniería de control. Uno de los sistemas más representativos y desafiantes es el péndulo invertido, Este sistema es un ejemplo clásico utilizado para enseñar conceptos de modelado, análisis y control de sistemas mecánicos no lineales.

El objetivo de este módulo didáctico es proporcionar una comprensión profunda sobre cómo modelar y controlar un sistema de péndulo invertido, un desafío interesante debido a su inestabilidad inherente y su comportamiento impredecible.

El experimento asociado con este módulo permitirá a los estudiantes interactuar con el sistema físico real, utilizando tanto herramientas teóricas como prácticas para evaluar la precisión y fiabilidad del modelo matemático generado. Esto no solo facilita la comprensión de los conceptos fundamentales de dinámica y control, sino que también ofrece la oportunidad de observar cómo las técnicas de control clásicas y modernas pueden ser implementadas en un sistema de difícil manejo.

1. Planteamiento del problema

1.1 Descripción

El control automático es una de las áreas en la ingeniería que enfrenta desafíos en su enseñanza por la naturaleza abstracta y compleja de los sistemas dinámicos sobre los que interviene. Las herramientas pedagógicas que permiten que los estudiantes experimenten en tiempo real con modelos y sistemas físicos son costosas, lo que lleva a que su uso sea restringido, limitando la posibilidad de comprender y aplicar conceptos esenciales como el control proporcional-integral-derivativo (PID) y la respuesta de sistemas de primer orden (Ogata, 2010).

Lo anterior se evidencia en la dificultad de los aprendices para realizar una transición efectiva entre el modelado teórico y la implementación práctica de los sistemas de control automático, de suma importancia para la formación hacia el desempeño en entornos industriales y de investigación (Nice, 2011)

El proyecto plantea como reto la implementación de una forma de medir la orientación del péndulo simple, empleando un potenciómetro giratorio, una placa Arduino para la adquisición de datos, empleando una entrada analógica en la placa para leer la salida del potenciómetro que luego se envía a *Simulink* para su visualización y comparación con la salida del modelo de simulación resultante. El péndulo invertido es un ejemplo clásico utilizado en la enseñanza de sistemas de control, debido a su comportamiento inherentemente inestable y difícil de manejar. Este tipo de sistemas no lineales representa un excelente caso de estudio para aplicar conceptos teóricos y prácticos del control moderno (Aracil & Gordillo, 2005). Además, se debe proporcionar una forma práctica y precisa de comparar el comportamiento real del péndulo con el modelo teórico.

1.2 Formulación

¿Cómo disponer de un recurso para experimentar el control automático con la variación de la orientación angular de un péndulo simple, medida mediante un potenciómetro giratorio?

2. Justificación

La realización de este proyecto se justifica por razones académicas y prácticas, que abordan la necesidad de comprender y validar los principios físicos de los sistemas oscilantes mediante experimentación y simulación. A continuación, se detallan las razones que apoyan la ejecución de este trabajo de investigación:

El péndulo simple es un sistema clásico estudiado en la física que permite comprender los conceptos de oscilación, movimiento armónico simple y las leyes del movimiento bajo la influencia de la gravedad. Si bien existen modelos teóricos que describen su comportamiento, es fundamental validar estos modelos mediante experimentos reales.

La combinación de herramientas de simulación (Software - *Simulink*) y hardware experimental (Arduino y elementos de control) proporciona una oportunidad única para desarrollar habilidades en áreas clave de la ingeniería y la física aplicada. Por medio de este proyecto, se aprenderá a conectar y programar sistemas de adquisición de datos y a modelar sistemas dinámicos en plataformas como *Simulink*, y a analizar para comparar resultados experimentales con los simulados.

Fomentar la comprensión teórica y práctica: Brindar a los estudiantes una comprensión integral de los procesos de modelado, simulación, control y validación experimental en sistemas dinámicos.

3. Objetivos

3.1 Objetivo general

Implementar un maletín didáctico que permita la realización de prácticas de control automático con péndulo invertido utilizando un sistema mecánico rotacional, *Simulink* y Arduino para la realización de prácticas en diferentes cursos de los programas de tecnología e ingeniería de la institución universitaria Pascual bravo.

3.2 Objetivos específicos

Modelar el sistema de péndulo invertido describiendo su comportamiento dinámico y teniendo en cuenta las interacciones físicas para el análisis de la estabilidad utilizando criterios matemáticos y físicos.

Construir el módulo didáctico mediante el diseño de un controlador adecuado que permita estabilizar el péndulo invertido en su posición de reposo conociendo las mediciones del ángulo y la velocidad angular.

Evaluar el desempeño del maletín implementado realizando pruebas experimentales para la confrontación del comportamiento del sistema físico con el modelo matemático bajo diversas condiciones iniciales y perturbaciones.

4. Referentes teóricos

4.1 Modelado Matemático de Sistemas Mecánicos No Lineales

El modelado matemático es el primer paso fundamental cuando se quiere analizar y controlar cualquier sistema dinámico, especialmente en casos complejos como el péndulo invertido (ver figura 1). Este proceso consiste en representar el comportamiento real del sistema mediante ecuaciones matemáticas que reflejan fielmente su dinámica interna y las interacciones entre sus componentes.

Para sistemas mecánicos como el péndulo invertido, normalmente se recurre a dos enfoques principales: las leyes de Newton o el formalismo de Lagrange. Las leyes de Newton se basan en el análisis directo de las fuerzas y momentos que actúan sobre cada uno de los componentes del sistema. Para ello, se emplean diagramas de cuerpo libre, identificando todas las fuerzas involucradas y estableciendo relaciones dinámicas mediante ecuaciones diferenciales que describen el movimiento resultante Ogata (2010).

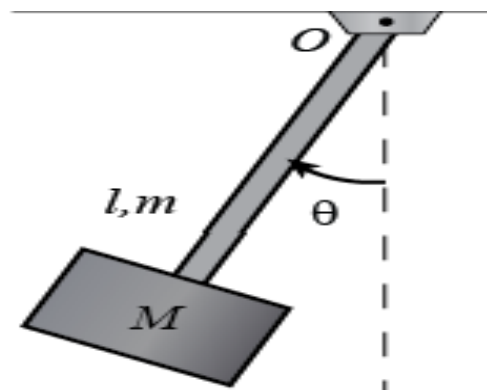


Figura 1. Ejemplo de un sistema mecánico no-lineal.

Fuente: Mathworks.

Por otra parte, el método de Lagrange utiliza un enfoque basado en la energía del sistema. En este formalismo, se definen la energía cinética y potencial del sistema y, a partir de ellas, se obtiene una función conocida como Lagrangiana. Utilizando esta función, se aplican las ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales permiten obtener directamente las ecuaciones

diferenciales que describen el movimiento del sistema. Este método resulta especialmente útil en sistemas complejos con varias variables o grados de libertad, ya que simplifica considerablemente el proceso matemático.

En ambos casos, el resultado es un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales, las cuales describen con precisión cómo evoluciona el sistema a lo largo del tiempo en respuesta a diferentes estímulos externos. Estas ecuaciones son esenciales para el análisis posterior, pues permiten estudiar la estabilidad, realizar simulaciones, diseñar controladores efectivos y comprender en profundidad el comportamiento dinámico del sistema real.

En definitiva, la selección del método adecuado para el modelado dependerá principalmente de las características del sistema que se analice, así como del grado de complejidad que se quiera manejar en el análisis matemático posterior (Nice, 2011).

El modelado matemático es el primer paso en el análisis y control de cualquier sistema dinámico, y en particular en el caso del péndulo invertido. Para modelar el sistema, se emplean las leyes de Newton o el formalismo de Lagrange, los cuales permiten escribir las ecuaciones del movimiento del sistema.

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\dot{\theta}\cos(\theta) + ml\theta^2\sin(\theta) = F$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos(\theta) + mgl\sin(\theta) = 0$$

Estas ecuaciones describen la dinámica no lineal del sistema carro-péndulo y constituyen la base para el análisis de control posterior.

4.2 Control PID en Sistemas No Lineales

El controlador PID (Proporcional, Integral y Derivativo) es una de las estrategias más utilizadas en el campo del control automático debido a su simplicidad, efectividad y facilidad de implementación. Aunque su diseño original está orientado a sistemas lineales, en la práctica también se aplica a sistemas no lineales, como el péndulo invertido, realizando ciertos ajustes y adecuaciones que permitan adaptarlo a las particularidades del comportamiento no lineal del sistema.

Este tipo de controlador regula la salida del sistema comparando constantemente la señal deseada (referencia) con la señal real (salida) linealizada, como lo muestra la figura 2. generando una señal de control basada en tres términos fundamentales:

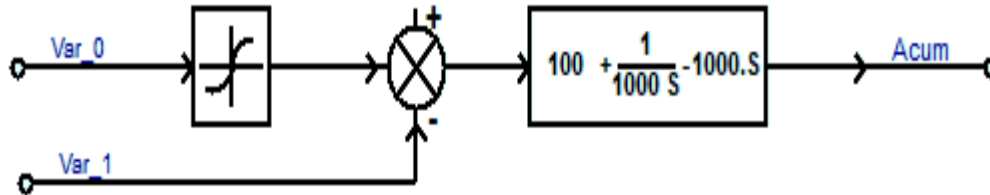


Figura 2. Representación en bloque de un PID no lineal.
Fuente: Propia.

Proporcional (P): Este término actúa directamente sobre el error instantáneo entre la salida del sistema y la referencia. Su función es producir una acción correctiva inmediata que sea proporcional a la magnitud del error. Cuanto mayor es el error, mayor es la corrección aplicada. No obstante, si se utiliza únicamente el componente proporcional, el sistema puede quedar con un error permanente en estado estacionario.

Integral (I): El componente integral se encarga de acumular el error a lo largo del tiempo. Es decir, corrige los errores pasados que el término proporcional no pudo eliminar por completo. Este término mejora la precisión del sistema al eliminar el error en régimen permanente, aunque su uso excesivo puede introducir inestabilidad o generar sobre oscilaciones.

Derivativo (D): El término derivativo anticipa el comportamiento futuro del error, calculando su tasa de cambio. Este componente mejora la estabilidad del sistema y reduce la tendencia a oscilar, al amortiguar la respuesta del controlador frente a variaciones bruscas del error.

En conjunto, el PID ofrece una acción de control balanceada que puede adaptarse a diferentes condiciones de operación. En sistemas no lineales, como el del péndulo invertido, su ajuste puede requerir técnicas adicionales como el tuning experimental, el uso de compensadores o el diseño en regiones de operación específicas, donde se asume un comportamiento cuasi lineal.

Gracias a su capacidad para mejorar tanto la respuesta transitoria como el comportamiento en estado estacionario, el controlador PID sigue siendo una herramienta ampliamente empleada en la industria y la academia, incluso en escenarios con dinámicas complejas.

El control de sistemas no lineales como el péndulo invertido ha sido ampliamente investigado debido a los retos que implica su estabilización, sobre todo cuando se parte de condiciones iniciales alejadas del equilibrio. Tal como lo exponen Aracil y Gordillo (2005), este sistema constituye una referencia clave en la enseñanza y análisis de estrategias avanzadas de control.

Generalmente se utiliza en sistemas lineales, su aplicación en sistemas no lineales es común con ciertas modificaciones y ajustes. El controlador PID ajusta la salida de un sistema en función de tres componentes:

4.3 Verificación y validación de modelos de simulación

Dentro del proceso de modelado de sistemas físicos, como el péndulo invertido, resulta fundamental asegurar que las representaciones utilizadas en las simulaciones sean confiables y útiles para el análisis y el diseño de controladores. Por esta razón, la verificación y la validación del modelo constituyen etapas clave en el desarrollo de sistemas de simulación siguiendo pasos de modelado, simulación, implementación y verificación como lo ilustra la figura 3.

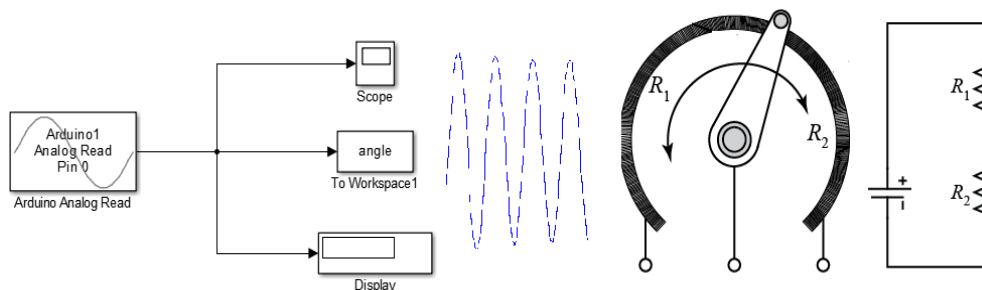


Figura 3. Ilustración del proceso de validación de modelos.

Fuente: propia.

Estos modelos, al ser aproximaciones matemáticas de la realidad, nunca logran replicar por completo el comportamiento del sistema físico, lo que obliga a aplicar metodologías que

permitan comprobar su precisión y pertinencia. Según Dorf (2016), un modelo de simulación se construye en etapas que van desde su formulación conceptual hasta su implementación computacional, y en cada una de ellas se deben aplicar criterios de evaluación para mantener la fidelidad respecto al sistema real.

La verificación tiene como objetivo revisar que el modelo implementado en la plataforma de simulación (en este caso, *Simulink*) respete las condiciones definidas inicialmente, incluyendo las ecuaciones, las restricciones y los parámetros físicos del sistema. Ogata (2010) señala que este proceso busca garantizar que la estructura del modelo funcione correctamente y sin errores de programación o lógica. En este sentido, la verificación se convierte en una tarea continua que acompaña el desarrollo del modelo, permitiendo detectar incoherencias entre lo que se pretende representar y lo que realmente se está ejecutando (Nice, 2011).

Estas actividades aseguran que el comportamiento observado en la simulación no solo sea estable y coherente, sino también comparable con lo que se espera en condiciones experimentales reales. Por tanto, en un proyecto como el presente, que combina simulación con pruebas físicas, validar y verificar correctamente el modelo es un paso necesario para interpretar adecuadamente los resultados y ajustar el diseño del controlador.

4.4 Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico se caracteriza por tener una evolución en el tiempo, es decir, su comportamiento depende no solo de las condiciones actuales, sino también del estado en el que se encontraba previamente. Esto implica que sus variables cambian de manera continua o discreta a lo largo del tiempo, siguiendo una relación matemática que define su dinámica interna (Ogata, 2010).

De acuerdo con la naturaleza del tiempo en el que se describen, estos sistemas pueden dividirse en dos grupos: los de tiempo continuo, en los que las variables cambian en todo instante del tiempo; y los de tiempo discreto, en los que las variables se actualizan solo en ciertos momentos específicos, como ocurre en sistemas digitales.

En la ingeniería de control es común encontrar ejemplos de sistemas dinámicos en diferentes áreas: desde circuitos eléctricos y mecanismos con movimiento, hasta procesos térmicos o hidráulicos. En el caso particular del péndulo invertido, se trata de un sistema mecánico de tiempo continuo, cuya evolución se puede describir mediante ecuaciones diferenciales.

Para poder analizarlos y diseñar estrategias de control, estos sistemas se representan frecuentemente utilizando funciones de transferencia o modelos en espacio de estados, herramientas que permiten estudiar su respuesta ante diferentes entradas y condiciones iniciales (Nice, 2011).

Los sistemas dinámicos generalmente se representan mediante ecuaciones diferenciales, debido a que estas permiten describir cómo evoluciona la salida del sistema en respuesta a una entrada, considerando su variación con el tiempo. Según Ogata (2010), un sistema lineal típico puede describirse matemáticamente a través de una ecuación diferencial general de orden n , tal como se muestra en la ecuación siguiente:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

Donde:

$y(t)$ representa la salida del sistema.

$u(t)$ representa la entrada o estímulo aplicado.

a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 son los coeficientes relacionados con las propiedades internas del sistema.

b_m, b_{m-1}, \dots, b_0 son los coeficientes que definen la respuesta a las entradas externas.

Para simplificar el análisis y diseño de controladores, estas ecuaciones diferenciales pueden resolverse utilizando la transformada de Laplace.

Esto permite trabajar en un dominio de frecuencia, convirtiendo el problema original representados en ecuaciones diferenciales en una forma más simple y manejable como lo son las ecuaciones algebraicas obtenidas de la aplicación de las transformadas de Laplace. (Nice, 2011).

4.5 Función de transferencia

La función de transferencia es una forma práctica y común de representar sistemas dinámicos lineales. Básicamente, es una relación matemática que conecta la entrada con la salida del sistema en el dominio de la frecuencia. Para obtener esta representación se aplica la transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema como se ve en la figura 4.

Según Ogata (2010), al aplicar esta transformada, se convierte la ecuación diferencial del sistema en una ecuación algebraica, mucho más sencilla de resolver y analizar. Esto facilita enormemente la tarea de estudiar la respuesta del sistema, así como diseñar y ajustar controladores, especialmente cuando se trabaja con sistemas complejos como el péndulo invertido.

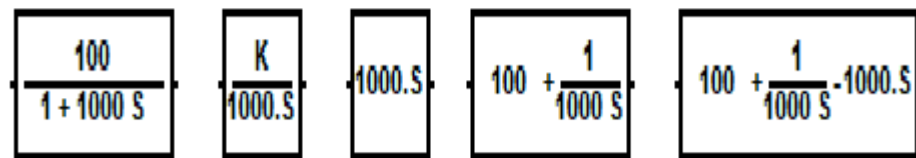


Figura 4. Diferentes tipos de funciones de transferencia.

Fuente: Propia.

La función de transferencia se expresa generalmente como una fracción entre dos polinomios en la variable compleja “s”, siendo el numerador el que define cómo el sistema responde ante las entradas, y el denominador el que determina su comportamiento interno. De esta manera, analizar el comportamiento dinámico y la estabilidad del sistema se vuelve más claro y directo (Nice, 2011).

En resumen, usar funciones de transferencia simplifica el análisis de sistemas dinámicos, ofreciendo una herramienta eficaz para evaluar rápidamente cómo responderá un sistema ante diferentes estímulos externos, y así poder diseñar estrategias de control adecuadas.

4.6 Representación Matemática en Diagramas de Bloques y Realimentación

Los diagramas de bloques son una herramienta práctica para representar visualmente los sistemas dinámicos mediante funciones de transferencia y ecuaciones diferenciales. Cada bloque dentro del diagrama contiene una función matemática que describe cómo una señal de entrada se convierte en una salida específica. Esta representación gráfica hace más sencillo el análisis del sistema, permitiendo aplicar métodos efectivos como el lugar de las raíces y el análisis de la respuesta en frecuencia (Ogata, 2010).

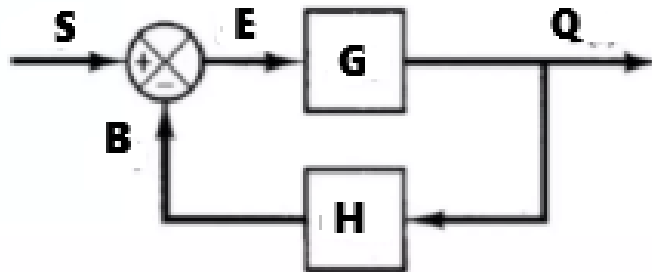


Figura 5. Bloques de control con retroalimentación.

Fuente: Propia.

Un concepto fundamental asociado a los diagramas de bloques es la realimentación. Este proceso consiste en tomar una parte de la salida del sistema y retornarla para ser comparada con la entrada inicial, permitiendo así corregir o ajustar el comportamiento del sistema en tiempo real. La realimentación puede ser negativa o positiva, dependiendo de si busca corregir errores o aumentar la respuesta del sistema (ver figura 5).

Generalmente, en los sistemas de control se utiliza la realimentación negativa, ya que mejora considerablemente la estabilidad, reduce errores y permite enfrentar mejor las perturbaciones externas (Dorf, 2021).

En definitiva, la combinación del uso de diagramas de bloques con técnicas de realimentación proporciona una forma eficiente y clara de estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos complejos, facilitando enormemente su análisis, diseño y control.

4.7 MATLAB y *Simulink*: Fundamentos y Aplicaciones

MATLAB, cuyo nombre deriva de "Matrix Laboratory", es una herramienta muy conocida y usada en la ingeniería debido a sus capacidades para realizar cálculos numéricos avanzados y programación matemática. Su combinación con *Simulink*, una herramienta gráfica desarrollada también por MathWorks (ver figura 5), facilita enormemente el modelado, análisis y diseño de sistemas dinámicos (MathWorks, 2025).

Simulink trabaja mediante diagramas de bloques, lo que simplifica representar ecuaciones diferenciales y diseñar sistemas complejos de forma intuitiva. Cuenta con una biblioteca completa de componentes que permiten simular sistemas lineales y no lineales en diferentes formatos, ya sea en tiempo continuo, discreto o híbrido. Esta flexibilidad facilita trabajar con distintos tipos de sistemas y aplicaciones (MathWorks, 2025).

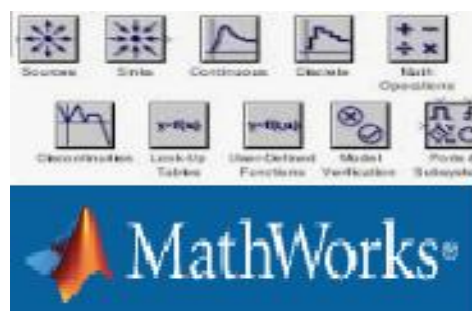


Figura 6. Entorno de MATLAB con *Simulink*.

Fuente: Mathworks.

Además, la estrecha integración entre MATLAB y *Simulink* permite compartir datos de forma sencilla, analizar resultados rápidamente y optimizar los modelos diseñados. Esta característica es particularmente valiosa cuando se trabajan sistemas dinámicos complejos, ya que facilita enormemente la tarea de ajustar y mejorar su desempeño (MathWorks, 2025). Por estas razones, MATLAB y *Simulink* son herramientas muy empleadas tanto en ambientes académicos como industriales, especialmente en áreas relacionadas con la automatización, sistemas embebidos y telecomunicaciones. La posibilidad de realizar simulaciones en lazo cerrado ofrece una gran ventaja, permitiendo probar y mejorar estrategias de control antes de implementarlas en sistemas físicos reales (MathWorks, 2025).

4.8 El Péndulo Invertido como Sistema de Control

El péndulo invertido es uno de los sistemas más representativos y utilizados en el estudio del control automático, debido a su dinámica inestable y a la necesidad de aplicar técnicas de control activas para mantenerlo en equilibrio. Este sistema consiste, en su forma más básica, en una barra rígida articulada sobre un punto de pivote, generalmente unido a un carro que puede desplazarse horizontalmente (ver figura 7). La posición vertical del péndulo es una configuración de equilibrio inestable, lo que significa que cualquier perturbación, por pequeña que sea, tiende a desviarlo de esa posición (Ogata, 2010).

Desde el punto de vista del análisis dinámico, el péndulo invertido se considera un sistema no lineal con múltiples grados de libertad. Esto implica que su comportamiento no puede describirse de forma precisa con ecuaciones lineales, especialmente cuando las oscilaciones son amplias. Para estudiar este tipo de sistemas, es común utilizar herramientas como el modelado mediante ecuaciones diferenciales no lineales, el formalismo de Lagrange, y representaciones en espacio de estados (Aracil & Gordillo, 2005).

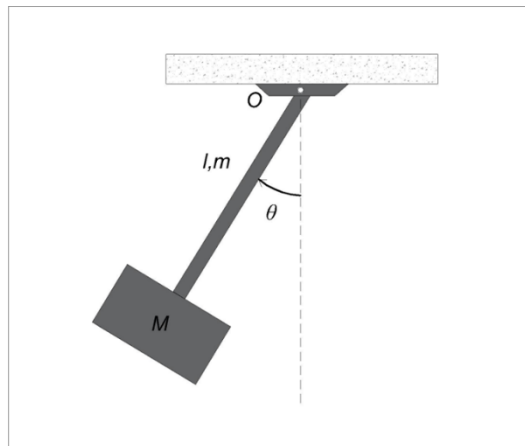


Figura 7. Diagrama de un sistema de péndulo invertido.
Fuente: Mathworks.

El principal reto de este sistema radica en mantener el equilibrio del péndulo en su posición vertical mediante el movimiento del carro. Para lograrlo, se requiere aplicar una fuerza horizontal controlada, determinada a partir de una estrategia de control adecuada. Por esta razón, el péndulo

invertido es una plataforma ideal para probar y comparar distintos tipos de controladores como PID, control por realimentación de estados, y técnicas más avanzadas como control óptimo o control adaptativo (Castaños & Carreras, 2004).

Además de su relevancia académica, el péndulo invertido también representa una analogía útil para sistemas reales de mayor complejidad, como robots bípedos, vehículos autónomos y estructuras que requieren estabilización activa. Por ello, su implementación en entornos educativos permite a los estudiantes enfrentarse a desafíos reales de modelado, simulación y control, combinando conocimientos teóricos con prácticas experimentales (MathWorks, 2023).

4.9 Simulación de Sistemas Dinámicos

La simulación de sistemas dinámicos es una herramienta muy usada en ingeniería, especialmente cuando se estudian sistemas cuyo comportamiento cambia a lo largo del tiempo. Consiste en representar matemáticamente el sistema a través de modelos que definen cómo evolucionan sus variables en función del tiempo, generalmente utilizando ecuaciones diferenciales que describen con precisión su comportamiento (Nice, 2011). La figura 8 presenta el ejemplo de la simulación de un sistema de péndulo invertido.

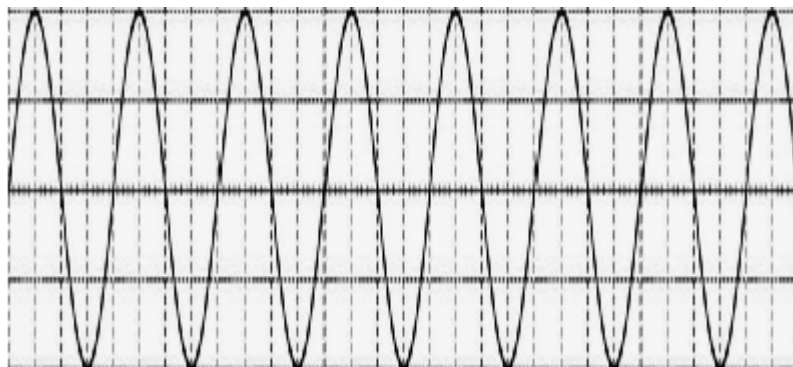


Figura 8. Onda sinusoidal resultado de la simulación de un sistema de péndulo.

Fuente: Diseño propio.

Para realizar estas simulaciones, se emplean programas especializados que permiten calcular cómo se comportará el sistema en cada instante futuro, utilizando métodos numéricos que avanzan paso a paso en el tiempo. Estos programas, además, ofrecen gráficos y visualizaciones

que hacen más sencillo observar y entender cómo reacciona el sistema ante diferentes estímulos. Por ejemplo, *Simulink* es ampliamente utilizado para simular sistemas continuos en el tiempo, mientras que herramientas como *Simevents* son más útiles para simulaciones que dependen principalmente de eventos específicos (Dorf, 2021).

Los ingenieros recurren a la simulación por diversos motivos prácticos:

Ahorro de recursos: Permite estudiar el comportamiento del sistema de forma segura y menos costosa que construir prototipos físicos desde cero (Nice, 2011).

Exploración y evaluación de diseños: Cuando aún no se dispone del sistema físico real, se pueden analizar distintas configuraciones y elegir la más adecuada (Nice, 2011).

Optimización del desarrollo: Facilita el diseño y la validación previa de software y controladores, disminuyendo notablemente los tiempos de desarrollo y costos de pruebas posteriores sobre sistemas físicos reales (Nice, 2011).

En conclusión, la simulación es un paso indispensable en la ingeniería moderna, ya que permite tomar mejores decisiones en menos tiempo y con menores costos, especialmente en proyectos donde probar directamente en sistemas reales es complejo o arriesgado.

4.10 Análisis de Sistemas Dinámicos: Primer, Segundo y Orden Superior

Los sistemas dinámicos pueden clasificarse según el orden de la ecuación diferencial que describe su comportamiento. Este orden lo define la derivada más alta presente en la ecuación matemática que representa al sistema.

El orden tiene un impacto directo en cómo reacciona el sistema frente a diferentes tipos de estímulos externos, y conocer estas diferencias es clave para poder analizar correctamente su comportamiento y diseñar estrategias de control adecuadas (Ogata, 2010).

Sistemas de Primer Orden son aquellos en los que la ecuación diferencial tiene como máxima derivada la primera. Su comportamiento se caracteriza por tener una respuesta sencilla y estable, usualmente sin oscilaciones.

Estos sistemas poseen una sola constante de tiempo, lo que determina qué tan rápido o lento responden a los cambios en la entrada. Ejemplos típicos de sistemas de primer orden incluyen circuitos RC simples o procesos térmicos básicos.

Sistemas de Segundo Orden son sistemas que están descritos por ecuaciones cuya derivada más alta es de segundo orden. A diferencia de los sistemas de primer orden, su respuesta puede incluir oscilaciones antes de estabilizarse.

La dinámica de estos sistemas depende principalmente de parámetros como el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural, que definen si la respuesta es sobre amortiguada, críticamente amortiguada o sub amortiguada. Ejemplos comunes incluyen sistemas mecánicos con masa y resorte, circuitos eléctricos RLC, o sistemas como el péndulo invertido.

Sistemas de Orden Superior, se dan cuando las ecuaciones diferenciales tienen derivadas superiores a segundo orden, se consideran sistemas de orden superior. Estos sistemas suelen tener un comportamiento más complejo, ya que implican múltiples polos y pueden presentar varios modos de respuesta simultáneamente.

En muchos casos, un sistema de orden superior se puede representar como una combinación de varios sistemas más simples, lo que facilita su análisis mediante técnicas específicas como la descomposición en fracciones parciales o la reducción a modelos de menor orden. Ejemplos típicos son sistemas multietapas de control, plantas industriales complejas o estructuras mecánicas con múltiples grados de libertad.

Entender las diferencias entre estos tipos de sistemas es fundamental en la ingeniería de control, ya que ayuda a seleccionar las técnicas de análisis y control más apropiadas según la complejidad y la dinámica específica del sistema bajo estudio (Ogata, 2010).

4.11 Métodos Didácticos en Ingeniería Electrónica.

La enseñanza de sistemas de control en ingeniería electrónica se apoya fuertemente en métodos prácticos que permitan al estudiante aplicar de forma directa los conceptos aprendidos en clase. Este tipo de enseñanza pone énfasis en el aprendizaje activo, donde los estudiantes interactúan con equipos reales y simuladores que reproducen situaciones similares a las que enfrentarán en su vida profesional. Esto facilita que desarrollen habilidades técnicas esenciales como el diagnóstico, análisis y solución efectiva de problemas en circuitos y sistemas de control (Ogata, 2010).

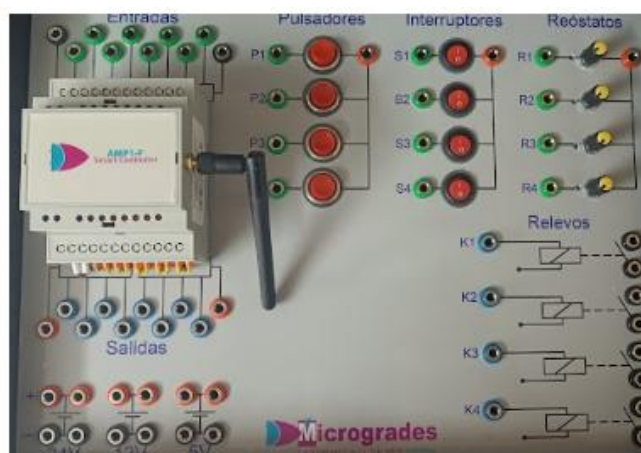


Figura 9. Distribución de maletín didáctico para PLC.

Fuente: Tecvolución.net.

Un elemento clave dentro de estos métodos didácticos son las maletas didácticas o módulos educativos (ver figura 9). Estas herramientas proporcionan un entorno ideal para que los estudiantes pongan en práctica conocimientos teóricos mediante actividades concretas, acercándolos a situaciones reales de trabajo. Al utilizar estas maletas didácticas, los estudiantes pueden experimentar y entender en profundidad cómo funcionan los sistemas electrónicos y de control, mejorando significativamente su capacidad para diseñar, implementar y ajustar sistemas en condiciones reales (Ogata, 2010).

Además, este enfoque pedagógico tiene importantes ventajas en el proceso de aprendizaje. El contacto directo con los equipos ayuda a consolidar conocimientos y hace que la teoría sea más

comprensible y significativa. También aumenta la motivación de los estudiantes, ya que enfrentarse a problemas prácticos los prepara para resolver situaciones similares en su futuro laboral. Así, estas herramientas didácticas no solo contribuyen a formar profesionales técnicamente competentes, sino que también potencian la capacidad de análisis crítico y la toma de decisiones prácticas en ingeniería (Nice, 2011).

4.12 Ingeniería basada en modelos (Model-Based Design - MBD)

La ingeniería basada en modelos (Model-Based Systems Engineering - MBSE) es un método que utiliza modelos para representar diferentes aspectos de un sistema, como su comportamiento, funciones e interacciones internas. Esto facilita enormemente el análisis y la comprensión de sistemas complejos, permitiendo integrar de forma más sencilla cada uno de sus componentes (Gene & Powell, 2009).

Mediante la ingeniería basada en modelos es posible diseñar, simular y evaluar el comportamiento completo de un sistema antes de llevarlo a la práctica. Este enfoque permite detectar errores, ajustar diseños y evaluar alternativas, reduciendo considerablemente tanto los tiempos como los costos asociados al desarrollo. Por esto es muy común en ámbitos como el desarrollo de software y sistemas embebidos, donde los modelos ofrecen la posibilidad de verificar interacciones y funcionamiento del sistema antes de construir físicamente los módulos (Gene & Powell, 2009).

Otro aspecto importante dentro del enfoque MBSE es el concepto de definición basada en modelos (Model-Based Definition - MBD), que se refiere específicamente al uso de modelos digitales en tres dimensiones (3D) para documentar y comunicar información sobre diseño y fabricación. Utilizar modelos digitales en lugar de planos 2D tradicionales minimiza errores e inconsistencias, facilitando la comunicación clara y directa entre distintos equipos, como diseño, fabricación y control de calidad (Gene & Powell, 2009).

Tal como se observa en la Figura 5 (Verificación y validación), la ingeniería basada en modelos combina diversas disciplinas, desde ingeniería de software con métodos formales como

el modelo en V y herramientas CASE, hasta la simulación de sistemas dinámicos con herramientas como MATLAB, *Simulink* o *Modelica*. También incorpora métodos tradicionales de diseño asistido por computador (CAD/CAE) y gestión de datos (PDM). Al integrar estas diferentes herramientas y métodos en un proceso unificado, la MBSE ayuda a garantizar que el sistema final cumpla plenamente con los requisitos iniciales y ofrezca el mejor rendimiento posible en situaciones reales (Visure, 2025).

5. Metodología

5.1 Tipo de proyecto

Este proyecto es de carácter experimental y de desarrollo tecnológico, con un enfoque aplicado en la medición y comparación de sistemas dinámicos. Este tipo de enfoque ha sido utilizado en trabajos anteriores con resultados satisfactorios, como el presentado por Castaños y Carreras (2004), donde se implementa una arquitectura de control reconfigurable para estabilizar el péndulo invertido en tiempo real. El proyecto involucra la recolección de datos a partir de un experimento práctico, donde se utilizará un potenciómetro giratorio para medir el ángulo de inclinación del péndulo, y la placa Arduino para la adquisición y procesamiento de estos datos.

Se lleva a cabo el diseño, implementación y programación de un sistema integrado que incluye tanto hardware como software.

5.2 Método

Formular las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del péndulo invertido.

Analizar el modelo del sistema en la posición invertida utilizando herramientas matemáticas.

Implementar la simulación del modelo matemático del péndulo simple en *Simulink* para visualizar el comportamiento teórico del sistema, con ayuda de la siguiente ecuación:

Seleccionar los componentes necesarios (Arduino, potenciómetro, cables, etc.) y la programación inicial de la placa Arduino para la adquisición de datos con su respectivo presupuesto.

Implementar el prototipo didáctico de experimentación con el péndulo mediante conexión del potenciómetro con el Arduino y PC.

Realizar pruebas experimentales iniciales con el sistema construido para obtener datos experimentales del comportamiento del péndulo invertido bajo diversas condiciones iniciales.

Escribir el manual de usuario del módulo didáctico con sus respectivas recomendaciones de seguridad y una guía corta de prácticas con el módulo de péndulo invertido.

5.3 Instrumentos de recolección de información.

5.3.1. Fuentes primarias. Las fuentes primarias utilizadas en este proyecto corresponden a textos académicos y científicos de rigor que han servido como fundamento para el modelado, análisis y validación de sistemas de control.

5.3.2. Fuentes secundarias. Las fuentes secundarias consultadas han complementado el marco teórico y metodológico del proyecto, aportando información práctica y actualizada sobre herramientas y técnicas específicas.

6. Resultados

El desarrollo del proyecto permitió implementar un sistema didáctico funcional para el análisis y control de un péndulo invertido. Se recopilaron resultados tanto teóricos como experimentales, los cuales permitieron validar la efectividad del modelo matemático y la capacidad del controlador diseñado.

Para formular las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del péndulo invertido se procede de la siguiente manera: con base en los parámetros físicos definidos (masa del carro, masa del péndulo, fricción, longitud, etc.) de la figura 10, se obtuvieron las ecuaciones de movimiento del sistema. Estas ecuaciones fueron linealizadas alrededor del punto de equilibrio para facilitar el diseño de controladores.

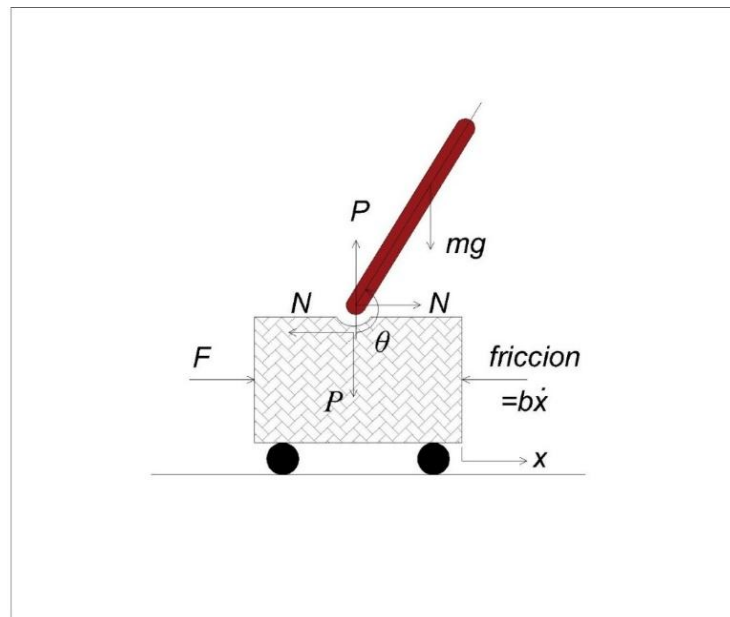


Figura 10. Representación del péndulo invertido y los diferentes parámetros de cálculo.
Fuente: Mathworks.

A partir del modelo lineal, se implementaron funciones de transferencia en MATLAB/*Simulink* para representar la dinámica del carro y el péndulo. Las gráficas resultantes permitieron observar la respuesta del sistema ante perturbaciones impulsivas, y sirvieron como referencia para el ajuste del controlador PID y del LQR (MathWorks, 2023).

$$P_{\text{cart}}(s) = ((I + ml^2)s^2 - mgl) / [q(s^4 + (b(I + ml^2)/q)s^3 - ((M + m) mgl)/q s^2 - (bmgl/q)s)]$$

$$P_{\text{pend}}(s) = (mls) / [q(s^3 + (b(I + ml^2)/q)s^2 - ((M + m) mgl)/q s - (bmgl/q))]$$

$$q = (M + m)(I + ml^2) - (ml)^2$$

Estas funciones de transferencia permiten observar el comportamiento del sistema frente a la fuerza aplicada F y sirven como base para el diseño del controlador en *simulink*. Para analizar el modelo del sistema en la posición invertida utilizando herramientas matemáticas, se parte de los parámetros que tiene el modelo físico del péndulo invertido.

$M = 0.380;$	% masa del péndulo (kg)
$m = 0.095;$	% masa del rodamiento (kg)
$l = 0.43;$	% longitud del péndulo (m)
$IG = (M*1+0.5*m*1)/(M+m);$	% ubicación del centro de masa (m)
$IO = 0.079;$	% momento de inercia estimado (kg-m ²)
$b = 0.003;$	% coeficiente de fricción estimado (N-m-s)
$\theta_{ic} = 0.423;$	% posición angular inicial (rad)
$\dot{\theta}_{ic} = 0;$	% velocidad angular inicial (rad/s)
$g = 9.81;$	% aceleración por gravedad (m/s ²)

Para implementar la simulación del modelo matemático del péndulo simple en *Simulink* para visualizar el comportamiento teórico del sistema, con ayuda de las ecuaciones establecidas en el punto anterior, que dan como resultado el siguiente código:

```
plot(p(1)*angle+p(2));
xlabel('time (seconds)')
ylabel('angle (degrees)')
title('Pendulum Free Response')
hold
plot(time+1.9,theta_lin*180/pi,'g:');
plot(time+1.9,theta_nl*180/pi,'r--');
legend('experiment','linear sim','nonlinear sim')
```

De la simulación se obtiene la curva presentada en la figura 11, que muestra como disminuye la amplitud a medida que avanza el tiempo, en una proporción del 5%.

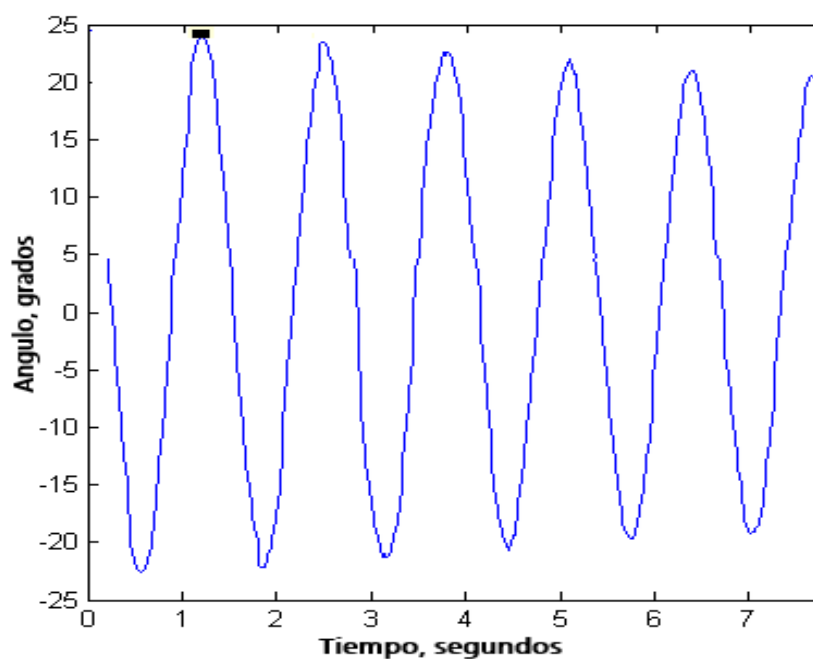


Figura 11. Resultado de la simulación del modelo.

Fuente: Propia.

La tarea de seleccionar los componentes necesarios (Arduino, potenciómetro, cables, etc.) y la programación inicial de la placa Arduino para la adquisición de datos, implicó la adquisición de los siguientes elementos:

La protoboard o placa de pruebas es una herramienta esencial para realizar conexiones rápidas y experimentales sin necesidad de soldar.

Está formada por agujeros conectados internamente, que permiten insertar y modificar fácilmente componentes electrónicos, acelerando el proceso de pruebas y ajustes en circuitos prototipo antes de implementarlos definitivamente (El Octavo Bit, 2025) (ver Figura 12).

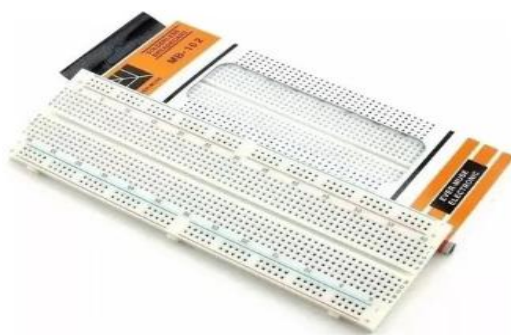


Figura 12. Protoboard utilizado en el proyecto.

Fuente: Mercadolibre.com

Los cables de conexión fácil Dupont de 30 cm se usan para facilitar la conexión rápida y segura entre componentes electrónicos, sensores y placas como Arduino y Raspberry Pi. Son prácticos en el desarrollo de prototipos debido a su flexibilidad y facilidad de conexión (ver Figura 13).



Figura 13. Cable de conexión fácil Dupont de 30 cm.

Fuente: didacticaselectronicas.com

El Arduino Uno Rev3 es una placa de desarrollo basada en el microcontrolador ATmega328P. Cuenta con 14 pines digitales de entrada/salida (de los cuales 6 pueden utilizarse como salidas PWM), 6 entradas analógicas, un cristal oscilador de 16 MHz, una conexión USB tipo B, un conector de alimentación, un cabezal ICSP y un botón de reinicio. Esta placa es ampliamente utilizada en aplicaciones educativas y prototipado debido a su facilidad de uso, compatibilidad con múltiples sensores y módulos, y gran comunidad de soporte. (Arduino, 2025) (ver Figura 14).

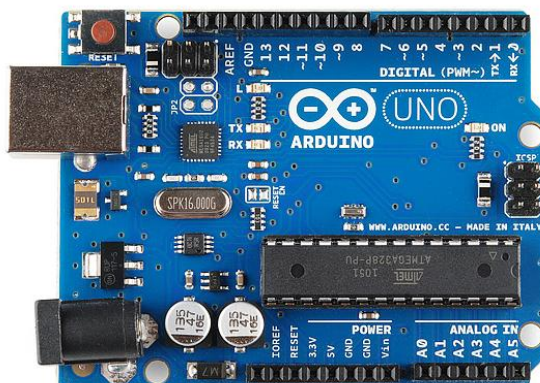


Figura 14. Arduino Uno Rev3

Fuente: Arduino.

El Mini PC MaxMini B1 incorpora Windows 11 y un procesador Intel Gemini Lake N4000 con 8GB de RAM y 128GB de almacenamiento expandible. Es compacto y posee múltiples opciones de conectividad, como puertos USB, HDMI, VGA, Ethernet Gigabit, Wi-Fi dual-band y Bluetooth, adecuado para controlar las prácticas en tiempo real (Bmax, 2025) (ver Figura 15).



Figura 15. Mini PC MaxMini B.

Fuente: Amazon.com

El monitor digital utilizado tiene un tamaño compacto de 10.1 pulgadas, con resolución de 1024×600 píxeles y entradas HDMI y VGA. Está diseñado especialmente para servir como interfaz visual en prácticas experimentales, mostrando de forma clara y precisa los resultados obtenidos (ver Figura 16).



Figura 16. Monitor digital de 10.1 pulgadas HDMI.

Fuente: Amazon.com

El conector 250VAC 15A, con suiche para panel ofrece una conexión segura para alimentación eléctrica, con interruptor integrado y porta fusible. Es especialmente útil en proyectos electrónicos, asegurando protección frente a sobrecargas y facilitando el encendido y apagado seguro del sistema (Didácticas Electrónicas, 2025) (ver Figura 17).



Figura 17. Conector 250VAC 15A, con suiche.

Fuente: didacticaselectronicas.com.

La caja Redline de aluminio con refuerzos en PVC posee cuatro compartimentos interiores acolchados, diseñados especialmente para proteger y transportar equipos electrónicos de manera segura y organizada. Es resistente, liviana y cuenta con broches metálicos que aseguran la integridad de los componentes transportados (ver Figura 18).



Figura 18. Caja Redline de aluminio con refuerzos en PVC.
Fuente: propia.

Para implementar el prototipo didáctico de experimentación con el péndulo mediante conexión del potenciómetro con el Arduino y PC, se utilizaron placas de acrílico para fijar y contener los diferentes componentes como se observa en la figura 19.



Figura 19. Maletín didáctico cerrado con monitor, conectores y módulo de prueba.
Fuente: Propia.

La figura 19 muestra el maletín didáctico cerrado, diseñado para facilitar el transporte y protección del sistema del péndulo invertido. El interior está acondicionado con componentes impresos en 3D y recubrimiento azul para organizar los diferentes elementos, incluyendo una pantalla que se utiliza para monitorear las variables del sistema durante las pruebas.



Figura 20. Maletín didáctico abierto mostrando conexiones internas.
Fuente: Propia.

La figura 20 muestra el maletín didáctico abierto, revelando el interior que alberga el sistema eléctrico y los componentes de alimentación. Se observan claramente los adaptadores de corriente y cables, organizados cuidadosamente para facilitar la conexión y la puesta en marcha del sistema experimental del péndulo invertido.

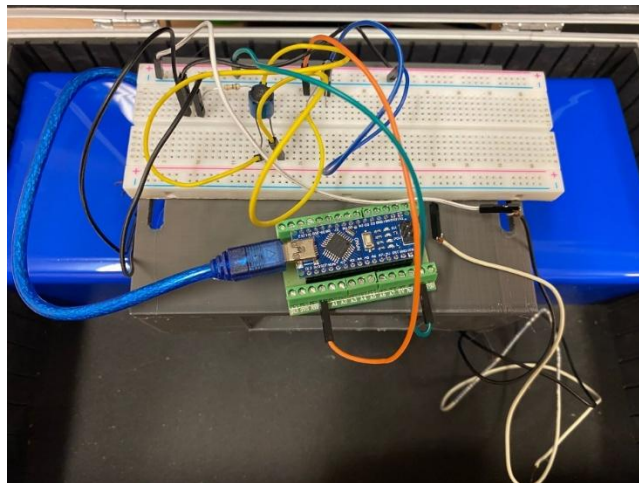


Figura 21. Vista detallada del Arduino y protoboard.
Fuente: Propia.

En la figura 21 se presenta una vista cercana del sistema electrónico utilizado en el módulo didáctico. Se observa claramente una placa Arduino Nano montada en una base de conexiones, junto a una protoboard con diferentes cables que permiten conectar los sensores y actuadores utilizados para medir y controlar el ángulo del péndulo invertido en tiempo real.

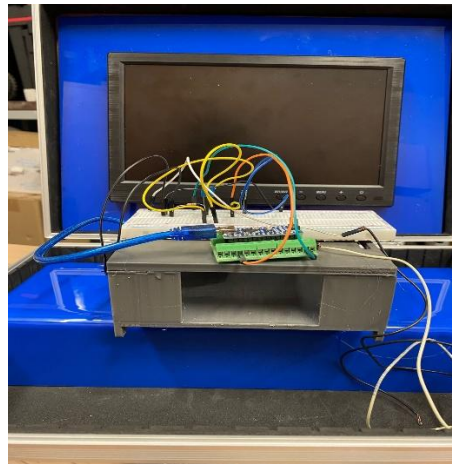


Figura 22. Sistema completo del módulo didáctico.

Fuente: Propia.

La figura 22 muestra el montaje completo del módulo didáctico del péndulo invertido. Se destaca claramente la integración de los elementos electrónicos (Arduino Nano y protoboard) sobre un módulo intercambiable especialmente diseñado. Al fondo se aprecia la pantalla instalada dentro del maletín, permitiendo realizar pruebas prácticas de control y validación del sistema.



Figura 23. Maletín didáctico con pantalla instalada y modulo intercambiable.

Fuente: Propia

La figura 23 muestra nuevamente el maletín abierto, destacando claramente la pantalla montada sobre una estructura interna azul, diseñada específicamente para sostener firmemente el monitor y ocultar ordenadamente el cableado. Esta pantalla permite visualizar los resultados obtenidos durante las pruebas experimentales del sistema, facilitando la interpretación directa del comportamiento del péndulo.

El sistema fue probado en diversas condiciones iniciales. La señal del potenciómetro permitió medir el ángulo de inclinación del péndulo con suficiente precisión para compararse con el modelo teórico, compuesto por un péndulo simple acoplado a un potenciómetro giratorio, una placa Arduino UNO como sistema de adquisición de datos y una interfaz *Simulink* para procesar y visualizar la información en tiempo real.

Para realizar pruebas experimentales iniciales con el sistema construido con el fin de obtener datos experimentales del comportamiento del péndulo invertido bajo diversas condiciones iniciales se tuvo en cuenta que una parte fundamental del proyecto fue comparar el comportamiento del sistema físico con los resultados obtenidos a través del modelo simulado en *Simulink*. Esta comparación permitió identificar qué tan precisa era la representación matemática utilizada y qué tan bien respondía el controlador diseñado bajo condiciones reales.

Tabla 1
Resultados

Actividad	Resultado teórico	Resultado experimental
Respuesta del péndulo ante perturbación de 1 N·s	Desviación < 0.05 rad, tiempo < 5 s (PID)	Desviación \approx 0.07 rad, tiempo \approx 5.3 s
Estabilización en estado estacionario (LQR)	Error menor al 2% en posición y ángulo	Error \approx 3% en posición, \approx 2.5% en ángulo
Visualización en tiempo real	Sistema MIMO estable con <i>Simulink</i>	Buena sincronía entre datos del sensor y gráfica

Fuente: Propia.

Como se observa en la tabla 1, se llevaron a cabo varias simulaciones para observar el comportamiento ideal del péndulo bajo el efecto de distintas fuerzas. Luego, se replicaron estas condiciones en el sistema real. A continuación, se presenta un resumen de los resultados:

En las simulaciones, el sistema respondió de forma ideal ante diferentes tipos de entradas, mostrando un control eficiente del ángulo del péndulo con tiempos de respuesta cortos y un error prácticamente nulo en estado estacionario. En cambio, en el prototipo real, aunque se logró una respuesta estable, se observaron ciertos desajustes, especialmente en el tiempo de estabilización y en pequeñas oscilaciones residuales del péndulo.

Por ejemplo, al aplicar una perturbación impulsiva, el modelo teórico estimaba una estabilización del ángulo en menos de 5 segundos, mientras que en la práctica el sistema tardaba entre 5 y 6 segundos, dependiendo de las condiciones iniciales. Además, la amplitud máxima del ángulo en el sistema físico era ligeramente mayor que la simulada, lo que indica que la energía disipada por la fricción no estaba bien representada en el modelo.

Otro punto importante fue la calidad de los datos adquiridos. En simulación, las señales son limpias y libres de ruido, mientras que en el sistema real hubo pequeñas variaciones en la lectura del potenciómetro, lo que generó cierta inestabilidad en los datos visualizados en *Simulink*. Esto afectó levemente la precisión del control, aunque sin comprometer el objetivo de mantener el péndulo en posición vertical.

A pesar de estas diferencias, el comportamiento general fue muy similar, lo cual demuestra que el modelo es válido y útil para fines educativos y de análisis. Las desviaciones encontradas no impidieron que el sistema funcionara correctamente, y más bien sirvieron para entender mejor los efectos de las variables externas en un sistema físico real.

Para validar el modelo matemático implementado en *Simulink*, se realizaron pruebas experimentales utilizando el prototipo físico del péndulo. Durante estas pruebas, se comparó el comportamiento del sistema real con las simulaciones teóricas, especialmente observando la respuesta del ángulo del péndulo frente a perturbaciones controladas.

En términos generales, la respuesta del sistema físico coincidió bastante con la esperada por el modelo. El controlador diseñado permitió mantener el péndulo en equilibrio, y los tiempos de estabilización fueron similares a los obtenidos en la simulación. Sin embargo, se presentaron algunas diferencias, como una estabilización un poco más lenta y ligeras vibraciones en el sistema real.

Estos desvíos se deben a factores como la fricción, el retardo en la adquisición de datos y la precisión limitada del sensor. Estas diferencias también han sido abordadas en otros trabajos similares, como el de Castaños y Carreras (2004), donde se plantea un esquema de control reconfigurable para mejorar la respuesta del péndulo invertido ante variaciones del entorno.

A pesar de esas pequeñas diferencias, el modelo cumplió su función como referencia para el diseño del controlador y el análisis del sistema. Se puede concluir que la validación fue exitosa, ya que el comportamiento general del prototipo fue coherente con lo que se había previsto en la etapa de simulación.

7. Conclusiones

El desarrollo de este módulo didáctico para el estudio del péndulo invertido permitió integrar conceptos teóricos y prácticos en un mismo entorno, facilitando el aprendizaje sobre sistemas dinámicos, modelado matemático y control. A través de la implementación física del sistema y su respectiva simulación en *Simulink*, se logró validar gran parte del comportamiento predicho por el modelo teórico.

Una de las principales conclusiones es que, aunque el modelo linealizado simplifica ciertas condiciones del sistema real, su uso es suficiente para diseñar controladores que permiten estabilizar el péndulo de forma efectiva. Esto demuestra que es posible trabajar con aproximaciones matemáticas para fines educativos y de control sin necesidad de modelos extremadamente complejos.

Durante las pruebas experimentales, se pudo observar que el comportamiento del sistema físico no es exactamente igual al modelo simulado, pero las diferencias fueron menores y manejables. Factores como la fricción, las imprecisiones del sensor y los retrasos en la comunicación influyen, pero no impiden que el sistema funcione de manera aceptable y con estabilidad.

Por último, se comprobó que el uso de herramientas como Arduino y *Simulink*, en conjunto con un diseño físico sencillo, es suficiente para construir un entorno de aprendizaje interactivo, donde se puede experimentar con sistemas de control en tiempo real. Este tipo de desarrollos no solo aporta al proceso de formación, sino que también permite visualizar de forma clara cómo se conectan los fundamentos matemáticos con la realidad física de un sistema.

8. Recomendaciones

Es recomendable considerar un modelo más detallado que tenga en cuenta elementos como la fricción del sistema o posibles retardos en la lectura del sensor. Aunque el modelo lineal utilizado fue funcional, estas mejoras podrían hacer que el comportamiento simulado se acerque aún más al real.

Sería conveniente reemplazar el potenciómetro por un sensor de mayor precisión, como un encoder óptico. Esto permitiría obtener mediciones más estables y reduciría el margen de error en el ángulo del péndulo, especialmente al momento de aplicar técnicas de control más exigentes.

Otra recomendación es crear una guía práctica más detallada que acompañe al módulo, donde se expliquen paso a paso las conexiones, configuraciones y ejemplos de prueba. Esto facilitaría su uso por parte de otros estudiantes o docentes sin necesidad de conocimientos previos avanzados.

Por último, sería interesante implementar y comparar otros tipos de controladores, como el control difuso o el control adaptativo. Esto permitiría ampliar el alcance del proyecto y ofrecer una herramienta más completa para la enseñanza de técnicas de control.

9. Referencias bibliográficas

- Alfaro, V. M. (2002). Ecuaciones para controladores PID universales. *Ingeniería*, 12(1–2), 15–21.
- Aracil, J., & Gordillo, F. (2005). El péndulo invertido: un desafío para el control no lineal. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 2(2), 73-81.
- Castaños, F., & Carreras, R. (2004). Levantamiento y control de un péndulo invertido con un esquema de control reconfigurable. XI Congreso Latinoamericano de Control Automático.
- Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2011). *Modern Control Systems* (12th ed.). Pearson.
- Fitzgerald, A. K. (2003). *Electric Machinery*. Mc.Graw Hill, Internationa.
- Franklin, G. F., Powell, J. D., & Emami-Naeini, A. (2015). *Feedback Control of Dynamic Systems* (7th ed.). Pearson.
- García-Peñalvo, F. J. (2019). *Inteligencia Artificial. Una perspectiva desde la ficción a la realidad*. <https://bit.ly/2Q0jap0>. doi: 10.5281/zenodo.2818903.
- García, J., Ramírez, L., Siordia, X., & Martínez, T. (2016). Las leyes de Newton en el modelado y control del péndulo invertido sobre un carro. *Revista Tecnología e Innovación*, 3(9), 34–42.
- MathWorks. (2023). Control Tutorials for MATLAB and Simulink – Inverted Pendulum. Recuperado de: <https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum§ion=SystemModeling>
- Nice, N. S. (2011). *Control Systems Engineering*. California.

Ogata, K. (2010). Ingeniería de control moderna (5ª ed.). Pearson Educación.

Ogata, K. (1987). Dinámica de sistemas. Prentice Hall.

Simulink. (2024). *Simulink*. <https://la.mathworks.com/products/simulink.html>

10. Bibliografía

Castaño, S. (s.f.). Control Automático Educación. Recuperado de:
<https://controlautomaticoeducacion.com/>

Calvó, A. (s.f.). Diseño, simulación y construcción de un sistema carro-péndulo mediante la tecnología Lego. Tesis de maestría, Universitat Politècnica de Catalunya.

Contreras Bravo, L. E., & Vargas Tamayo, L. F. (2007). Generación de modelos de caminata bípeda a través de diversas técnicas de modelamiento. *Ingeniería*, 11(2), 47–58.

Ruiz, J. A. (2014). Modelado y simulación de sistemas dinámicos. Editorial Alfaomega.

Arduino.cc. (s.f.). Documentación oficial de Arduino UNO. Recuperado de:
<https://www.arduino.cc>